TRYGONOMETRJA PŁASKA

DO UŻYTKU SZKÓŁ ŚREDNICH

ZE 116 RYSUNKAMI

OPRACOWAŁ

WŁ. WOJTOWICZ

WYDANIE II POPRAWIONE

NAKŁAD GEBETHNERA I WOLFFA
WARSZAWA — KRAKÓW — LUBLIN — ŁÓDŹ
POZNAŃ — WILNO — ZAKOPANE

DRUKARNIA TECHNICZNA, SP. AKC., WARSZAWA, UL. CZACKIEGO 3/5

Przedmowa do wydania drugiego

W nowem wydaniu poprawiono błędy, które się zakradły do wydania pierwszego, zwiększono znacznie liczbę zadań oraz ujęto niektóre ustępy w sposób bardziej precyzyjny. Gruntowniejszej przeróbce uległ zwłaszcza § 72; sądzę, że w teraźniejszej postaci da on możność uczniowi zapoznania się z różnemi sposobami elementarnemi badania funkcyj trygonometrycznych i dyskutowania zagadnień.

Zgodnie z programem Ministerstwa W. R. i O. P., rozdział I winien być przerobiony w klasie VI; zadania w końcu tego rozdziału przeznaczone są bądź dla zdolniejszych uczniów, bądź do powtórzenia tego materjału w klasie VII przed przystąpieniem do systematycznego kursu trygonometrji. Reszta matarjału przeznaczona jest na klasę VII i VIII. Do opracowania w klasie VIII nadają się specjalnie rozdział VII i § 72.

Układ materjału klasy VII jest następujący: po uogólnieniu pojęcia funkcji trygonometrycznej (rozdz. II) następuje rozwiązywanie trójkątów, jako bezpośrednie zastosowanie najelementarniejszych własności tych funkcyj (rozdz. III), poczem w rozdziale IV wracamy do badania dalszych ich własności. Taki układ uważam za praktyczniejszy pod względem metodycznym; gdyby kto jednak wolał trzymać się układu systematycznego, t. j. opracować odrazu całą t. zw. goniometrję, może to z łatwością uczynić. W tym celu wystarczy po § 44 opracować tw. Carnota (§ 52), poczem można przejść bezpośrednio do §§ 61—68.

Podręcznik zawiera materjał, wymagany przez program gimnazjum matematyczno-przyrodniczego. W gimnazjum humanistycznem można opuścić §§ 66—68, znaczną część materjału, zawartego w §§ 71—72, oraz trudniejsze zadania w innych ustępach.

SPIS RZECZY.

Str.

§§ 1—2. Wstęp. 1

Rozdział I. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego i ich zastosowania.

§§ 3. O układzie spółrzędnych prostokątnych. 4
§§ 4—7. Funkcja tangens 6
§§ 8—9. Funkcja kotangens 10
§ 10. Tablice czterocyfrowe. Sposób posługiwania się niemi 12
§§ 11—12. Działania na wartościach przybliżonych 14
§ 13. O interpolacji linjowej 22
§§ 14—18. Funkcje sinus i kosinus 25
§ 19. Konstrukcyjne rozwiązywanie równań trygonometrycznych . . 39
§§ 20—22. Związki między funkcjami tego samego kąta. Tożsamości trygonometryczne 43
§§ 23—24 Zastosowanie rachunku logarytmicznego do trygonometrji 48
§§ 25—26. O rozwiązywaniu trójkątów ogólnych zapomocą funkcyj kąta ostrego 51
Ćwiczenia do rozdziału I 54

Rozdział II. Funkcje trygonometryczne kątów dowolnych.

§ 27. Uogólnienie pojęcia kąta 58
§§ 28—33. Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta 61
§§ 34—35. Zastosowanie do równania linji prostej 68
§§ 36—37. Kąty, mające ten sam sinus 71
§§ 38—39. Kąty, mające ten sam kosinus 73
§ 40. Kąty, mające ten sam tangens lub kotangens 75
§ 41. Okresowość funkcyj trygonometrycznych 77
§ 42—43. Redukcja kątów do pierwszej ćwiartki 77
§ 44. Wykresy funkcyj trygonometrycznych 83

Rozdział III. Związki między elementami trójkąta dowolnego. Cztery zasadnicze przypadki rozwiązywania trójkątów.

§ 45. Pole trójkąta 87
§§ 46—47. Wzór sinusów 88

Str.

§ 48. Zastosowanie wzoru sinusów do rozwiązywania trójkątów . . 90
§ 49. Pierwszy przypadek rozwiązywania trójkątów 90
§§ 50—51. Drugi przypadek rozwiązywania trójkątów 92
§§ 52—54. Wzór kosinusów 100
§ 55. Wzory Newtona 106
§ 56. Wzór tangensów 108
§ 57. Trzeci przypadek rozwiązywania trójkątów 108
§ 58. Promień koła wpisanego i wzór Herona 110
§ 59. Wzór połówkowy 112
§ 60. Czwarty przypadek rozwiązywania trójkątów 112

Rozdział IV. O funkcjach sum i różnic kątów.

§ 61 Sinus i kosinus sumy lub różnicy dwóch kątów 118
§ 62. Tangens i tangens sumy lub różnicy dwóch kątów 120
§ 63. Funkcje kąta podwojonego 120
§ 64. Funkcje połowy kąta 127
§ 65—66. Zamiana sum i różnic funkcyj na iloczyn 130
§ 67—68. Inne przykłady przekształcania dwumianów na jednomiany Kąt pomocniczy 137

Rozdział V. Równania trygonometryczne.

§ 69—70. Rozwiązywanie równań pierwszego rodzaju 143
§ 71. Rozwiązywanie równań drugiego rodzaju 146
§ 72. Przykłady zastosowania wzorów trygonometrycznych i dyskusji zagadnień 151

Rozdział VI. Przykłady zastosowania funkcyj trygonometrycznych do geometrji praktycznej.

§§ 73—74. Zadania i przykłady 176

Rozdział VII. Miara teoretyczna kątów.

§§ 75—76. Radjan 181
§§ 77—84. Związki między miarą teoretyczną kąta ostrego a jego funkcjami trygonometrycznemi 184
§ 85. Przykłady zastosowań poprzednich wzorów 193
§ 86. Uogólnienie pojęcia funkcji trygonometrycznej 196

Tematy do obszerniejszych rozprawek 202

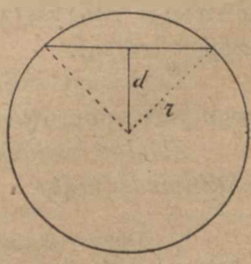
Wstęp..

§ 1. Ktokolwiek miał do czynienia z utworami geometrycznemi, wie, że istnieje zależność między bokami i kątami trójkąta. Jeżeli np. mamy dane dwa boki a, b trójkąta i kąt C, między niemi zawarty, możemy z tych trzech elementów zbudować jeden i tylko jeden trójkąt, niewątpliwie więc zachodzi związek między danemi elementami a, b, C z jednej strony, a trzema szukanemi elementami A, B, c — z drugiej.

To samo zjawisko dostrzegamy w całym szeregu zadań konstrukcyjnych. Istotnie, jeżeli z trzech jakichś elementów danych (odcinków lub kątów) udało się zbudować trójkąt, t. j. wyznaczyć graficznie wszystkie niewiadome jego boki i kąty, w takim razie musi istnieć jakaś zależność między elementami danemi z jednej strony, a niewiadomemi bokami i kątami — z drugiej.

Na razie poza stwierdzeniem faktu, że zależność istnieje, nic prawie o niej powiedzieć nie potrafimy. Dla przykładu weźmy proste zadanie:

W kole o promieniu r *wykreślić cięciwę, odległą od środka koła o odcinek* d.



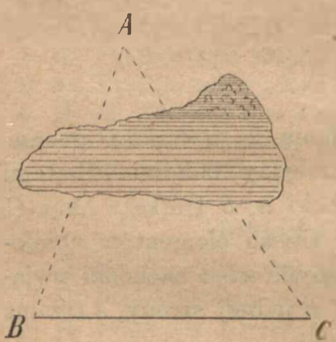
Rys. 1.

O ile tylko $d < r$, możemy z łatwością rozwiązać to zadanie (w jaki sposób?); możemy nawet na mocy twier. Pitagorasa obliczyć długość cięciwy, natomiast nie potrafimy odpowiedzieć na pytanie: jak wielki jest kąt środkowy, podparty przez naszą cięciwę? Nie ulega wątpliwości, że kąt ten jest

funkcją długości cięciwy; co więcej — zbudowaliśmy go czyli wyznaczyliśmy zapomocą konstrukcji geometrycznej, a jednak nie możemy obliczyć jego miary [1]).

Widzimy tedy, że w naszych wiadomościach geometrycznych istnieje luka, którą wypadnie zapełnić. Luka ta jest tem dotkliwsza, że w wielu zagadnieniach praktycznych zachodzi również potrzeba dokładnej znajomości związku między bokami i kątami trójkąta. Wyobraźmy sobie np., że chcemy rozwiązać następujące zagadnienie praktyczne:

Znaleźć odległość punktu niedostępnego A od punktów B i C, zakładając, że odcinek BC możemy zmierzyć bezpośrednio.



Rys. 2.

Jeżeli zmierzyliśmy bok a oraz kąty B i C (rys. 2), wówczas potrafimy zbudować trójkąt $\triangle ABC$, nie umiemy jednak obliczyć długości jego boków b i c.

Mógłby nam ktoś zarzucić, że w zagadnieniach praktycznych potrzebne i możliwe są tylko rozwiązania przybliżone (dlaczego?), że więc i w danym przykładzie można trudności ominąć, a to np. przez wykreślenie trójkąta $\triangle ABC$ w odpowiedniej skali i zmierzenie jego boków b i c. Takie rozwiązanie sprawy nie może nas jednak zadowolić, gdyż na tej drodze osiągnąć można tylko pewien stopień przybliżenia, (który w jednym wypadku może być wystarczający, w innym — nie), matematykowi natomiast, który pragnąłby wiedzę swoją zastosować do zagadnień praktycznych, musi chodzić o stworzenie metody rozwiązywania trójkątów czyli obliczania z dowolną dokładnością nieznanych elementów trójkąta, jeżeli mamy dane trzy elementy, wyznaczające trójkąt.

Tak więc zarówno rozważania teoretyczne, jak potrzeby praktyczne doprowadzają nas do następującego zagadnienia:

Zbadać związki funkcjonalne, zachodzące między bokami i kątami trójkąta.

---

[1]) Uczeń wskaże kilka innych przykładów (zwłaszcza z pośród najprostszych twierdzeń o trójkątach), dowodzących istnienia zależności między bokami i kątami trójkąta.

Jest to pierwsze pytanie, jakie stawia sobie dział matematyki szkolnej, zwany **trygonometrją**.

§ 2. Aby to pytanie dogodnie rozwiązać, musimy je sprowadzić do postaci jak najprostszej. W tym celu zauważmy, że jeśli trójkąty $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ mają mieć równe kąty czyli mają być podobne, wówczas trzeba i wystarcza, żeby boki tych trójkątów były do siebie proporcjonalne czyli, żeby zachodziły dwa równania:

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}, \text{ oraz } \frac{a}{c}=\frac{a'}{c'}.$$

Widzimy, że w trójkącie ogólnym kąty zależne są od dwóch zmiennych stosunków $\frac{a}{b}$ i $\frac{a}{c}$. Badanie nasze byłoby znakomicie uproszczone, gdyby istniały trójkąty, w których wielkość kątów byłaby zależna tylko od jednego stosunku boków. Otóż warunkowi temu czynią zadość zarówno trójkąty prostokątne, jak i równoramienne, gdyż trójkąty każdego z tych dwóch rodzajów są do siebie podobne, jeżeli stosunek dwóch boków jednego trójkąta równa się stosunkowi odpowiednich boków drugiego.

Stąd wniosek, że badanie należy rozpocząć bądź od trójkątów prostokątnych, bądź od równoramiennych. Chwila zastanowienia wystarczy, aby przekonać się, że oba te sposoby badania są w gruncie rzeczy identyczne. Istotnie, każdy trójkąt równoramienny możemy uważać za złożony z dwóch równych trójkątów prostokątnych, a ponieważ każdy trójkąt, bez względu na jego kształt, możemy podzieli na dwa trójkąty prostokątne, zatem możemy oczekiwać, że dokładne zbadanie zależności między bokami i kątami trójkąta prostokątnego da nam klucz do rozwiązania ogólnego zagadnienia, które sobie postawiliśmy.

Tak więc rozpoczniemy od badania związków między bokami i kątami trójkąta prostokątnego.

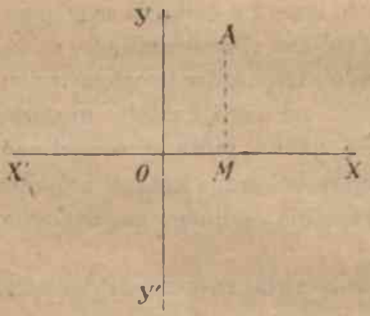
ROZDZIAŁ I.

Funkcje trygonometryczne kąta ostrego i ich zastosowania.

O układzie spółrzędnych prostokątnych.

§ **3.** Położenie każdego punktu na płaszczyźnie możemy wyznaczyć zapomocą dwóch liczb, zwanych spółrzędnemi tego punktu.

Niech będą dane na płaszczyźnie dwie prostopadłe do siebie proste (np. XOX', YOY' na rys. 3), zwane osiami spółrzędnych.

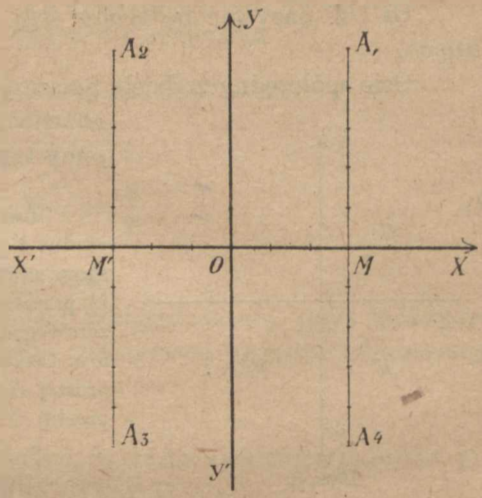


Rys. 3.

Położenie dowolnego punktu A płaszczyzny jest w zupełności wyznaczone, jeżeli znamy drogę OMA, która prowadzi z punktu O do A najpierw po osi OX, następnie zaś równolegle do osi OY.

Na pierwszy rzut oka mogłoby się wydawać, że wystarczy zmierzyć długość odcinków OM, OA, żeby wyznaczyć położenie pnnktu A. Przekonamy się zaraz, że tak nie jest. Wyobraźmy sobie, iż mając dane osie spółrzędnych, szukamy punktu A, do którego prowadzi droga, składająca się z odcinków o długości 3 cm. i 5 cm. Przekonamy się, że zamiast jednego punktu znajdziemy cztery, czyniące zadość temu warunkowi,

np. punkty A_1, A_2, A_3, A_4 na rys. 4. Istotnie, odcinek równający się 3 cm. możemy odmierzyć na osi OX bądź w prawo, bądź w lewo od punktu O; w ten sposób otrzymamy na osi albo punkt M, albo M'. Dalej, drugą część drogi, równającą się 5 cm., możemy od punktów M i M' odmierzyć bądź w górę (równolegle do osi OY), bądź w dół.



Rys. 4.

Widzimy tedy, że prócz długości odcinków, z których składa się droga, wiodąca z punktu O do A, musimy znać *zwroty* tych odcinków. Aby raz na zawsze ustalić te zwroty, umówmy się, że na osiach spółrzędnych będziemy uważali za dodatnie te zwroty, które na rys. 4 zostały oznaczone strzałkami. Wobec tego powiemy, że $OM = 3$ cm., $OM' = -3$ cm., $MA_1 = 5$ cm., $MA_4 = -5$ cm., i t. d.

W ten sposób usunęliśmy wszelką dwuznaczność. Jakoż do punktu A_1 prowadzi droga, składająca się z odcinków 3 i 5,
„ „ A_2 „ „ „ „ „ -3 i 5,
„ „ A_3 „ „ „ „ „ -3 i -5,
„ „ A_4 „ „ „ „ „ 3 i -5.

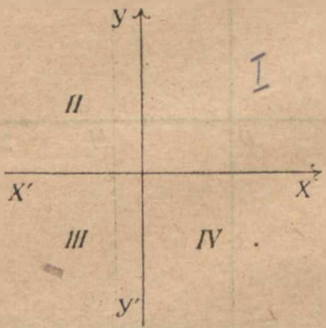
Liczby względne, zamieszczone w powyższej tabelce, nazywamy *spółrzędnemi prostokątnemi* odpowiednich punktów. Np. spółrzędnemi punktu A_3 są liczby -3 i -5. Pierwszą z tych liczb, która jest miarą odcinka OM', leżącego na osi OX, z uwzględnieniem zwrotu tego odcinka, nazywamy *odciętą* punktu A_3. Druga spółrzędna jest miarą odcinka $M'A_3$ z uwzględnieniem zwrotu tego odcinka i nazywa się *rzędną* punktu A_3.

Chcąc zaznaczyć, że spółrzędne, powiedzmy, punktu P równają się 7 i -2, będziemy nieraz pisali krótko P (7; -2), wymieniając zawsze najpierw odciętą punktu, potem zaś jego rzędną.

Punkt przecięcia się osi nazywać będziemy *punktem zerowym*, albo też *początkiem układu spółrzędnych*.

Oś OX nazywać będziemy *osią odciętych*, oś OY *osią rzędnych*.

Osie spółrzędnych dzielą płaszczyznę na cztery części, które nazwiemy *ćwiartkami* i ponumerujemy tak, jak na rys. 5.



Rys. 5.

Ćwiczenia I. 1. W której ćwiartce rzędna i odcięta każdego punktu mają te same znaki? W której ćwiartce mają znaki przeciwne? Jakie są spółrzędne punktu zerowego? Jakie są odcięte i rzędne punktów, leżących na półprostej OX? na półprostej OX'? na półprostej OY? na półprostej OY'?

2. Na papierze kratkowanym obrać osie spółrzędnych i, przyjmując szerokość kratki za jednostkę miary, wyznaczyć punkty o spółrzędnych $(4; -1)$, $(-3; 7)$, $(-8; -\frac{3}{2})$, $(-6; 0)$, $(0; -5)$.

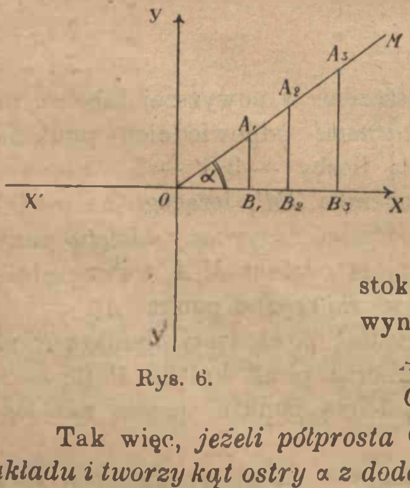
3. Obliczyć odległość punktu K $(4; 9)$ od punktu zerowego. To samo dla punktu L $(-5; -10)$. To samo ogólniej: dla punktu M $(a; b)$.

4. Obliczyć odległości między następującemi parami punktów:

a) $(1; 6)$ i $(4; 9)$ *b*) $(-8; -5)$ i $(3; 7)$

c) $(-6; -3)$ i $(10; -4)$ *d*) $(m; n)$ i $(m'; n')$, gdzie m, n, m', n' są to liczby względne.

§ **4.** Niech będą dane dwie osie spółrzędnych XOX', YOY' (rys. 6). Z punktu zerowego poprowadźmy w pierwszej ćwiartce półprostą, tworzącą k ą t o s t r y α z dodatnim zwrotem osi OX. Jeżeli na tej półprostej obierzemy dowolne punkty $A_1, A_2, A_3, \ldots$ i poprowadzimy z nich prostopadłe do osi OX, otrzymamy szereg trójkątów prostokątnych podobnych, z których wynika, że



Rys. 6.

$$\frac{A_1B_1}{OB_1} = \frac{A_2B_2}{OB_2} = \frac{A_3B_3}{OB_3} = \ldots$$

Tak więc, *jeżeli półprosta* OM *przechodzi przez początek układu i tworzy kąt ostry* α *z dodatnim zwrotem osi* OX, *to stosunek rzędnej każdego punktu tej półprostej do odciętej tego samego*

punktu jest liczbą stałą. Tę stałą liczbę nazywamy *tangensem kąta* α (lub kąta XOM) i oznaczamy symbolem

$$\operatorname{tg} \alpha \text{ lub } \operatorname{tg} (XOM).$$

Mamy tedy równanie

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \tag{I}$$

które stanowi **określenie tangensa.**

Tangens kąta ostrego jest liczbą dodatnią, gdyż spółrzędne x, y każdego punktu, leżącego w pierwszej ćwiartce płaszczyzny, są liczbami dodatniemi.

§ 5 Musimy teraz zbadać, w jaki sposób zmienia się tg α, gdy zmieniamy kąt ostry α.

Tangens określiliśmy jako stosunek dwóch liczb $\left(\frac{y}{x}\right.$ czyli stosunek rzędnej do odciętej$\left.\right)$; zmiany tego stosunku łatwiej byłcby badać, gdyby jeden z jego wyrazów był stały, najłatwiej zaś dalibyśmy sobie radę z postawionem zagadnieniem, gdyby jeden z wyrazów stosunku $\frac{y}{x}$ równał się jedności. W tym celu możemy na osi x-ów odłożyć odcinek $OB = 1$, wystawić prostopadłą BC i badać, jak zmieniają się rzędne punktów przecięcia się prostej BC z ramieniem OM kąta ostrego $\sphericalangle XOM$, gdy zmieniamy ten kąt (np. obracając OM dokoła punktu O w zwrocie, zaznaczonym strzałką na rys. 7).

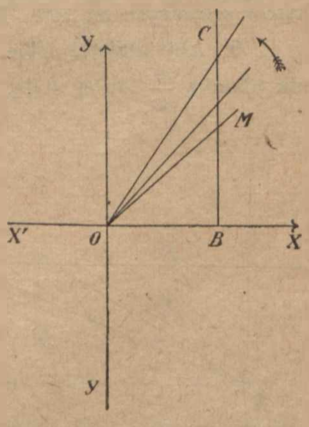
Wskazać sposób zbudowania takiego kąta $\sphericalangle XOM$, żeby było

$$\operatorname{tg} (XOM) = \tfrac{1}{2};\ 1;\ 2;\ 5;\ 10.$$

Dowieść zapomocą rys. 7, że

1) *jeżeli kąt ostry* α *rośnie, to* tg α *rośnie, jeśli zaś* α *maleje, to maleje również* tg α;

2) tg α *może być dowolną liczbą dodatnią* (dowolnie wielką lub dowolnie małą), *jeżeli* α *jest kątem ostrym.*



Rys. 7.

Ćwiczenia II. 1. Przypuśćmy, że zamiast odcinka $OB = 1$ (rys. 7) odłożyliśmy na osi x-ów odcinek $OB = 3$; w jaki sposób otrzymać możemy kąt $\sphericalangle XOM$, czyniący zadość równaniu tg $(XOM) = \frac{1}{3}$? tg $(XOM) = 7$?

2. Czy rozumowanie nasze w § 5 było dostatecznie ogólne? Czy mieliśmy prawo odłożyć odcinek $OB = 1$?

Powtórzyć badanie, o którem mowa w § 5, zakładając, że $OB = a$, gdzie a jest jakąkolwiek stałą liczbą dodatnią.

3. Zbudować kąt ostry α, wiedząc, że tg $\alpha = \frac{m}{n}$, gdzie m i n są liczbami dodatniemi.

4. Zbudować kąt ostry α, mając dane, że

$$\text{(I)} \quad \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$$

$$\text{(II)} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

5. W jaki sposób zbudować można kąt ostry α, czyniący zadość równaniu

$$\operatorname{tg} \alpha = 0{,}1; \quad 0{,}01; \quad 0{,}001?$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 10; \quad 100; \quad 10000?$$

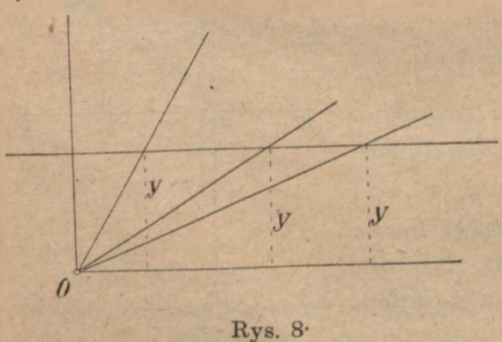
6. Opierając się na znanych własnościach trójkąta prostokątnego, obliczyć tg 45^0; tg 30^0; tg 60^0.

7. Posługując się kątomierzem i papierem milimetrowym, znaleźć tg 25^0; tg 55^0.

8. Postępując tak, jak w poprzedniem zadaniu, ułożyć tabliczkę tangensów dla kątów 5^0, 10^0, 15^0, 20^0, ...; 60^0.

[Należy tak obrać odcinek na osi x-ów, żeby każdy tangens można było odrazu z rysunku odczytać w postaci ułamka dziesiętnego o mianowniku 100. Porównać otrzymane liczby z kupną tablicą tangensów. Czy ten sposób graficzny układania tablicy tangensów daje dobre wyniki dla kątów większych od 70^0? Dlaczego?]

9. Aby ułatwić sobie badanie zmian tangensa, uczyniliśmy mianownik ułamka $\frac{y}{x}$ liczbą stałą. Równie dobrze mogliśmy obrać stały licznik i badać zmiany tangensa w zależności od zmian mianownika. Przeprowadzić to badanie (rys. 8).



Rys. 8.

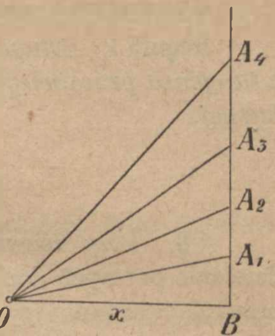
10. Niech na rysunku 9 będzie $\sphericalangle BOA_1 = \sphericalangle A_1OA_2 = \sphericalangle A_2OA_3 = \sphericalangle A_3OA_4 = \alpha$.

Opierając się na własnościach dwusiecznej w trójkącie, zbadać, która z dwóch liczb jest większa:

$\operatorname{tg} 2\alpha$ czy $2 \operatorname{tg} \alpha$?
$\operatorname{tg} 3\alpha$ „ $3 \operatorname{tg} \alpha$?
$\operatorname{tg} 3\alpha$ „ $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} 2\alpha$?
$\operatorname{tg} 4\alpha$ „ $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} 3\alpha$?

Czy wobec tego tangens rośnie proporcjonalnie do kąta?

Porównać ten wynik z tabliczką tangensów (zadanie 8).

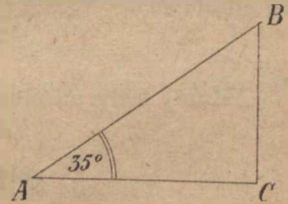


Rys. 9.

§ 6. Z badań, przeprowadzonych w §§ 4 i 5, wynika, że każdemu kątowi ostremu odpowiada liczba dodatnia, w zupełności oznaczona, zwana tangensem tego kąta, i odwrotnie: każdą liczbę dodatnią uważać możemy za tangens kąta ostrego, który potrafimy zawsze wyznaczyć (w jaki sposób?). Wobec tego mamy prawo twierdzić, że *tangens kąta ostrego jest funkcją tego kąta*. Funkcja ta rośnie stale wraz z kątem i przybierać może wszelkie wartości dodatnie, zarówno dowolnie wielkie, jak dowolnie małe.

§ 7. Zdobyte wiadomości łatwo jest zastosować do rozwiązywania trójkątów prostokątnych. Niech będzie dane np.

Zadanie. *Rozwiązać trójkąt prostokątny ABC* (rys. 10), *mając dane:* $\sphericalangle A = 35^0$, $AC = b = 40$ m.



Rys. 10.

Z kątami nie mamy trudności, gdyż

$$C = 90^0, \quad B = 55^0.$$

Chcąc obliczyć długości boków, załóżmy, że wierzchołek A jest początkiem układu spółrzędnych, AC zaś leży na osi x-ów tak, że spółrzędnemi punktu B są $BC = y$ i $AC = b = x$.

Wiemy, że
$$\operatorname{tg} A = \frac{y}{x},$$
zatem
$$\operatorname{tg} 35^0 = \frac{y}{40},$$
skąd
$$y = 40 \,.\, \operatorname{tg} 35^0$$
$$= 40 \,.\, 0{,}70 \text{ m.}$$

Przeciwprostokątną c możemy obliczyć na zasadzie twier. Pitagorasa.

Z powyższego zadania możemy wysnuć następującą regułę:

Reguła I. *Długość przyprostokątnej równa się iloczynowi z tangensa przeciwległego kąta przez długość drugiej przyprostokątnej.*

Funkcja kotangens.

§ **8**. Przy rozwiązywaniu zadań zachodzi nieraz potrzeba dzielenia pewnych liczb przez tangens kąta. Gdybyśmy np. w poprzedniem zadaniu (rys. 10) mieli daną przyprostokątną a i kąt A, wówczas moglibyśmy znaleźć przyprostokątną b, nie obliczając drugiego kąta ostrego. Jakoż na zasadzie ustalonej co tylko reguły mamy

$$a = b \cdot \mathrm{tg}\, A,$$

skąd

$$b = \frac{a}{\mathrm{tg}\, A}.$$

Dzielenie jest działaniem praktycznie trudniejszem od mnożenia, chcąc więc uniknąć dzielenia przez tangens, wprowadzamy nową funkcję trygonometryczną, zwaną kotangensem (po łacinie cotangens).

Kotangens określamy *jako odwrotność tangensa i oznaczamy symbolem*

$$\mathrm{ctg}\, \alpha \text{ albo } \mathrm{ctg}\, (XOM).$$

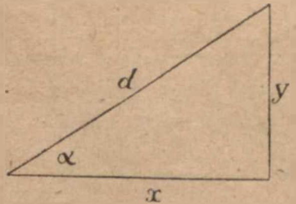
Mamy tedy na mocy określenia

$$\mathrm{ctg}\, \alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\, \alpha} = \frac{x}{y}. \qquad \text{(II)}$$

Stosując pojęcie kotangensa do rozwiązywania trójkątów prostokątnych, mamy

$$b = \frac{a}{\mathrm{tg}\, A},$$

$$= a \cdot \mathrm{ctg}\, A,$$



Rys. 11.

możemy tedy sformułować następującą

Regułę II. *Długość przyprostokątnej równa się kotangensowi kąta przyległego, pomnożonemu przez długość drugiej przyprostokątnej.*

§ 9. Z porównania obu reguł wynika, że w trójkącie prostokątnym

$$\text{ctg}\, A = \text{tg}\, B,$$

a ponieważ

$$B = 90^0 - A,$$

zatem mamy wzór ogólny

$$\textbf{ctg}\, A = \textbf{tg}\, (90^0 - A)$$

czyli

tangens kąta ostrego równa się kotangensowi kąta dopełniającego [1]).

Ćwiczenia III. 1. Zbudować kąty α, β, γ, czyniące zadość równaniom

$$\text{ctg}\, \alpha = \frac{3}{2} \qquad \text{ctg}\, \beta = 4{,}5 \qquad \text{ctg}\, \gamma = 0{,}72.$$

2. Czy wobec znalezionego w § 9 związku potrzebna jest specjalna tablica kotangensów? Zapomocą zbudowanej poprzednio tablicy tangensów znaleźć

$$\text{ctg}\, 40^0, \qquad \text{ctg}\, 65^0, \qquad \text{ctg}\, 80^0.$$

3. Opierając się na znanych twierdzeniach geometrycznych, obliczyć

$$\text{ctg}\, 45^0, \qquad \text{ctg}\, 60^0, \qquad \text{ctg}\, 30^0.$$

4. Z określenia kotangensa wynika, że $\text{tg}\, \alpha \, . \, \text{ctg}\, \alpha = 1$. Sprawdzić, czy wartości tangensa i kotangensa, odczytane z tabliczki, czynią zadość temu równaniu. Jeżeli wynik nie jest dokładny, to dlaczego?

5. W jaki sposób zmienia się ctg α, gdy kąt α rośnie od 0^0 do 90^0? Czy kotangens może być liczbą dowolnie małą? dowolnie wielką?

6. W jaki sposób zbudować można kąt α, czyniący zadość równaniom

$$\text{ctg}\, \alpha = 0{,}1; \qquad 0{,}001; \qquad 0{,}00001$$
$$\text{ctg}\, \alpha = 100; \qquad 1000; \qquad 100\,000?$$

7. Posługując się rysunkiem 9 na str. 9, zbadać, która z dwóch liczb jest większa

$$\text{ctg}\, 2\alpha \quad \text{czy} \quad 2\, \text{ctg}\, \alpha$$
$$\text{ctg}\, 3\alpha \quad „ \quad 3\, \text{ctg}\, \alpha$$
$$\text{ctg}\, 3\alpha \quad „ \quad \text{ctg}\, \alpha + \text{ctg}\, 2\alpha?$$

Porównać z wynikami ćwiczenia II, 10 (str. 8).

8. Zbudować kąty $\sphericalangle XOM$, $\sphericalangle XOP$ takie, żeby było

$$\sphericalangle XOP = 90^0 - \sphericalangle XOM,$$

odłożyć $OM = OP$ i dowieść geometrycznie, że $\text{tg}\, (XOP) = \text{ctg}\, (XOM)$ i odwrotnie.

9. Na papierze milimetrowym zbudować wykresy obu funkcyj tg α i ctg α, odkładając na osi x-ów odcinki, których długości miałyby się do siebie tak, jak wielkości odpowiednich kątów. Wykres przedstawia łuki krzywych, zwanych *tangensoidą* i *kontangensoidą*.

---

[1]) Spostrzeżenie to wyjaśnia nam pochodzenie nazwy „kotangens“ jest to skrót dwóch wyrazów łacińskich; tangens complementi czyli: tangens kąta dopełniającego.

Rozwiązać trójkąt prostokątny *ABC*, mając dane:

10. $A = 25^0$, $a = 16$. 11. $B = 15^0$, $a = 22$.

12. $a = 7$, $b = 10$. 13. $a = 9$, $b = 25$.

14. Promienie słońca padają pod kątem 15^0 względem płaszczyzny poziomej; obliczyć długość cienia, które rzuca drzewo, mające 9,5 m. wysokości i znajdując się na tej płaszczyźnie.

15. Rozwiązać trójkąt równoramienny, którego kąt przy podstawie ma 55^0, wysokość zaś ma 4,8 m.

16. Mniejsza przekątna rombu równa się 12 m., jeden z jego kątów ma 130^0. Rozwiązać romb.

17. Boki prostokąta równają się odpowiednio 42 m. i 50 m. Obliczyć nachylenie jego przekątnej względem boków.

18. Wiedząc, że $\operatorname{tg} 60^0 = \sqrt{3}$ i opierając się na własnościach dwusiecznej kąta w trójkącie, obliczyć $\operatorname{tg} 30^0$, a stąd obliczyć $\operatorname{tg} 15^0$.

19. Wiedząc, że $\operatorname{tg} 45^0 = 1$, obliczyć $\operatorname{tg} 22^0 30'$.

Tablice czterocyfrowe. Sposób posługiwania się niemi.

§ **10**. Chcąc rozwiązywać wszelkie zadania praktyczne, wymagające zastosowania funkcyj $\operatorname{tg} \alpha$ i $\operatorname{ctg} \alpha$, musimy posiadać obszerniejsze tablice niż te, które zbudowaliśmy graficznie. Istnieje wiele tablic, podających wartości funkcyj trygonometrycznych z większą lub mniejszą liczbą znaków dziesiętnych; pod względem sposobu użycia tablice te niewiele od siebie różnią się, poprzestaniemy tedy na wskazaniu, jak należy posługiwać się danemi, zawartemi w książeczce: *Wojtowicz*. Tablice matematyczno-fizyczne czterocyfrowe.

Przypuśćmy, że chcemy znaleźć wartość $\operatorname{tg} 40^0 10'$. W tablicy IX (str. 19) szukamy najpierw w kolumnie pierwszej po stronie lewej kąta 40^0; na skrzyżowaniu wiersza, odpowiadającego temu kątowi, z kolumną, mającą u góry napis 10′, znajdujemy liczbę 0,8441. Tak więc

$$\operatorname{tg} 40^0 10' = 0,8441.$$

W taki sam sposób znajdujemy, że

$$\operatorname{tg} 41^0 40' = 0,8899.$$

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		Poprawki 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
40°	0,8391	0,8441	0,8491	0,8541	0,8591	0,8642	0,8693	49°	5	10	15	20	25	30	35	40	45
41	8693	8744	8796	8847	8899	8952	9004	48	5	10	16	21	26	31	36	41	47
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

Gdyby chodziło o wartość tg 41° 43′ moglibyśmy znaleźć ją przez *interpolację*. Ponieważ

$$\operatorname{tg} 41^\circ 50' - \operatorname{tg} 41^\circ 40' = 0{,}0053,$$

zatem, zakładając, że w przedziale od 41°40′ do 41°50′ przyrosty tangensa są proporcjonalne do przyrostów kąta, obliczylibyśmy, że gdy kąt wzrośnie w tym przedziale o 3′, tangens winien wzrosnąć o 0,00159 (czyli, po zaokrągleniu, o 0,0016), tak, iż ostatecznie

$$\operatorname{tg} 41^\circ 43' = 0{,}8915.$$

Ten sam wynik otrzymamy prędzej, posługując się tabliczką „poprawek". Na skrzyżowaniu wiersza, odpowiadającego kątowi 41°, z kolumną poprawek, mającą napis 3′, znajdujemy liczbę 16, którą należy rozumieć jako 0,0016. Liczbę tę dodajemy do odczytanej poprzednio wartości tg 40° 40′, ponieważ tangens rośnie, gdy rośnie kąt.

Z tej samej tablicy odczytywać można wartości kotangensów. W tym celu szukamy liczby stopni w kolumnie po stronie prawej. Jeżeli np. chcemy poznać wartość ctg 49° 46′, wówczas w kolumnie prawej szukamy kąta 49°, następnie zaś odczytujemy liczbę, leżącą na skrzyżowaniu tego wiersza z kolumną, która ma u dołu napis 40′. Znajdujemy w ten sposób liczbę 0,8491, tak, iż

$$\operatorname{ctg} 49^\circ 40' = 0{,}8491.$$

Teraz musimy wprowadzić poprawkę, odpowiadającą kątowi 6′. Poprawki szukamy w tym samym wierszu. Znajdujemy liczbę 30, którą należy rozumieć jako 0,0030. Poprawkę tę odejmujemy od wartości ctg 49° 40′, gdyż kotangens maleje, gdy kąt rośnie. Mamy tedy ostatecznie

$$\operatorname{ctg} 49^\circ 46' = 0{,}8461.$$

Zadanie odwrotne, t. j. znajdowanie kąta, gdy dany jest jego tangens lub kotangens, nie przedstawia trudności. Jeżeli np. wiemy, iż

$$\operatorname{ctg} \alpha = 0{,}8710,$$

wówczas z tablicy odczytujemy

$$\operatorname{ctg} 49^\circ = 0{,}8693;$$

tabliczka poprawek (w tym samym wierszu) nie zawiera potrzebnej nam poprawki 0,0017, zawiera natomiast poprawkę 0,0015, która odpowiada kątowi 3′. Ponieważ kąt maleje, gdy jego kotangens rośnie, zatem

$$\operatorname{ctg} 48^\circ 57' = 0{,}8708.$$

Możemy tedy twierdzić, iż

$$\alpha = 48^{0}57' \text{ (z dokładnością do } 1')$$

przyczem kąt obliczyliśmy z nadmiarem.

Działania na wartościach przybliżonych.

§ **11.** W zastosowaniach matematyki operujemy liczbami, które są wynikiem pomiarów i, jako takie, obarczone są mniejszym lub większym błędem. Wobec tego w zagadnieniach praktycznych musimy jasno zdawać sobie sprawę ze stopnia dokładności, którą osiągnęliśmy w tym czy innym rachunku.

Oznaczmy przez A i B dwie liczby dodatnie, które znamy tylko z pewnem przybliżeniem i niech przybliżone (i dane nam) wartości tych liczb będą a i b. Niech będzie dalej

$$A - a = \alpha, \quad B - b = \beta.$$

Liczby α i β nazywać będziemy błędami (bezwzględnemi) wartości przybliżonych. Liczby te mogą być dodatnie lub ujemne, w praktyce jednak nie wiemy zazwyczaj, jakiego znaku są błędy α i β, to znaczy nie wiemy, czy wartości przybliżone dane są z nadmiarem czy z niedomiarem.

Liczbę dodatnią, większą od wartości bezwzględnej błędu, nazywać będziemy górnym kresem błędu i oznaczać literą gotycką.

Jeśli więc mamy

$$|\alpha| < \mathfrak{a}, \qquad |\beta| < \mathfrak{b},$$

to $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ są górnemi kresami błędów α i β.

Zauważyć należy, że w praktyce nie znamy dokładnie wielkości błędów, natomiast staramy się zawsze poznać ich górne kresy. Jeżeli np. dokonaliśmy pomiaru jakiejś długości, to nie wiemy, oczywiście, jak wielki popełniliśmy błąd, możemy jednak ocenić, czy jest on mniejszy czy większy od 1 m., od 1 cm. lub t. p.

Dodawanie i odejmowanie wartości przybliżonych. Ponieważ mamy

$$\begin{aligned}(A + B) - (a + b) &= \alpha + \beta \\ &< \mathfrak{a} + \mathfrak{b}\end{aligned}$$

zatem mamy prawo twierdzić, że *błąd sumy dwóch wartości przybliżonych jest mniejszy od sumy górnych kresów błędów obu składników.*

Uczeń rozszerzy sam tę regułę na 3, 4, ... składników.

Tak samo mamy

$$(A - B) - (a - b) = \alpha - \beta$$
$$< \mathfrak{a} + \mathfrak{b}\ ^{1})$$

czyli *błąd różnicy jest mniejszy od sumy górnych kresów błędów odjemnej i odjemnika.*

Jeżeli np. chcemy obliczyć sumę lub różnicę liczb

$$7{,}415 \pm 3{,}7920,$$

z których pierwsza podana jest z dokładnością do 0,001, druga zaś z dokładnością do 0,0003, wówczas możemy tylko tyle twierdzić, że błąd tej sumy lub różnicy jest mniejszy od 0,0013. Wobec tego w wyniku ostatecznym możemy podać conajwyżej trzy znaki dziesiętne: podawanie czwartego znaku byłoby bezcelowe.

Mnożenie wartości przybliżonych.

I. Jeżeli jeden czynnik (nazwijmy go N) jest liczbą dokładną, wówczas

$$AN - aN = \alpha N$$
$$< \mathfrak{a} N$$

a więc błąd iloczynu jest mniejszy od iloczynu z górnego kresu błędu jednego czynnika przez drugi czynnik.

II. Jeżeli oba czynniki są wartościami przybliżonemi, to

$$AB - ab = (a + \alpha)\ (b + \beta) - ab$$
$$= a\beta + \alpha b + \alpha\beta$$
$$< a\mathfrak{a} + b\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{b}$$

W praktyce możemy często uprościć ten wzór, gdyż zazwyczaj $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ są bardzo małemi liczbami w porównaniu z a i b, wobec czego iloczyn ich $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ jest bardzo mały w porównaniu z $a\mathfrak{a} + b\mathfrak{b}$, tak, iż trójmian $a\mathfrak{a} + b\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ zastąpić możemy przez dwumian $a\mathfrak{a} + b\mathfrak{b}$ [2]).

---

[1]) Nie mamy prawa twierdzić, że $\alpha - \beta < \mathfrak{a} - \mathfrak{b}$. Zbudować przykład liczbowy, stwierdzający fałszywość tej nierówności!

[2]) Wyrażenie „mała liczba“ nie jest ścisłem pojęciem matematycznem, ta sama bowiem liczba może być w jednym wypadku uważana za wielką, w drugim za małą. Błąd 0.01 gr., popełniony przy pomiarze fizycznym, może pozbawić wszelkiej wartości pomiar i wnioski z niego wysnute, natomiast możemy zupełnie pominąć błąd o 10 gr. (a więc 1000 razy większy), popełniony przy ważeniu kg. masła na targu. Jeśli więc powiadamy, że błąd jakiś jest „mały“, chcemy tylko tyle powiedzieć, że *w danem zagadnieniu* nie ma on praktycznego znaczenia i że możemy nie brać go w rachubę.

Jeżeli np. mamy do obliczenia iloczyn

$$4531 \,.\, 0{,}7239$$

przyczem pierwszy czynnik dany jest z dokładnością do 1, drugi zaś z dokładnością do 0,0001, wówczas mamy prawo powiedzieć tylko tyle, że błąd iloczynu jest napewno mniejszy, niż

$$4531 \,.\, 0{,}0001 + 0{,}7239 \,.\, 1 + 1 \,.\, 0{,}0001$$

a więc tem bardziej jest mniejszy, niż $0{,}5 + 0{,}7$ czyli mniejszy niż 1,2. Napiszemy tedy

$$4531 \,.\, 0{,}7239 = 3280 \text{ (z dokładnością do 1,2).}$$

Dzielenie wartości przybliżonych. Mamy

$$\begin{aligned} \frac{A}{B} - \frac{a}{b} &= \frac{Ab - Ba}{Bb} \\ &= \frac{(a+\alpha)\, b - (b+\beta)\, a}{b\,(b+\beta)} \\ &= \frac{\alpha b - \beta a}{b\,(b+\beta)} \\ &< \frac{\mathfrak{a} b + \mathfrak{b} a}{b\,(b-\mathfrak{b})} \end{aligned}$$

Ostatni ułamek możemy przekształcić tak, aby otrzymać łatwą regułę obliczania górnego kresu błędu ilorazu. Zauważywszy, że wszystkie liczby zarówno w liczniku, jak w mianowniku tego ułamka są dodatnie, zbadamy trzy przypadki:

I. Jeżeli $a < b$, to

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{a} b + \mathfrak{b} a}{b\,(b-\mathfrak{b})} &< \frac{\mathfrak{a} b + \mathfrak{b} b}{b\,(b-\mathfrak{b})} \\ &= \frac{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}}{b - \mathfrak{b}} \end{aligned}$$

II. Jeżeli $a = b$, to

$$\frac{\mathfrak{a} b + \mathfrak{b} a}{b\,(b-\mathfrak{b})} = \frac{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}}{b - \mathfrak{b}}$$

III. Jeżeli $a > b$ i jeżeli iloraz $a : b$ zawiera się między kolejnemi liczbami naturalnemi n oraz $n+1$, wtedy niewątpliwie $a < (n+1)\, b$, wobec czego mamy prawo twierdzić, że

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{a} b + \mathfrak{b} a}{b\,(b-\mathfrak{b})} &< \frac{\mathfrak{a} b + \mathfrak{b}\,(n+1)\, b}{b\,(b-\mathfrak{b})} \\ &= \frac{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\,(n+1)}{b - \mathfrak{b}}. \end{aligned}$$

Tak więc *jeżeli* $a < b$, *to błąd ilorazu jest mniejszy od* $\frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{b-\mathfrak{b}}$, *jeżeli* $a > b$, *to błąd ilorazu jest mniejszy od* $\frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\,(n+1)}{b-\mathfrak{b}}$.

§ **12**. Chcąc zastosować poznane wzory do obliczeń trygonometrycznych, musimy pamiętać, że tablice nasze podają wartości tangensów z dokładnością do 0,0001, jeżeli kąt jest nie większy od 60^0. Jeżeli kąt jest większy od 60^0, lecz mniejszy od 85^0, możemy odczytać jego tangens z dokładnością do 0,001; wreszcie tangensy kątów większych od 85^0 podane są tylko z dokładnością do 0,01.

Dla przykładu rozwiążmy następujące

Zadanie I. *W trójkącie prostokątnym* ABC *mamy dane*

$$B = 56^0 14', \quad b = 42{,}65 \text{ m}.$$

Obliczyć przyprostokątną a, *zakładając:* 1) *że* B *i* b *dane są dokładnie;* 2) *że kąt* B *dany jest z dokładnością do* 1′, *bok* b *zaś z dokładnością do* 0,01 *m*.

Mamy najpierw

$$a = b \,.\, \text{ctg } B$$
$$= 42{,}65 \,.\, \text{ctg } 56^0 14'$$
$$= 42{,}65 \,.\, 0{,}6686$$

I. Jeżeli 42,65 jest dokładną wartością boku b, to błąd iloczynu jest mniejszy od

$$42{,}65 \,.\, 0{,}0001$$

zatem iloczyn możemy podać z dwoma znakami dziesiętnemi.

Mamy tedy

$$a = 28{,}52 \text{ (z dokładn. do 0,01)}.$$

II. Z tablic widzimy, że jeśli kąt $B = 56^0 13'$, to ctg $B = 0{,}6690$; jeżeli zaś $B = 57^0 15'$, to ctg $B = 0{,}6682$.

Tak więc w iloczynie

$$42{,}65 \,.\, 0{,}6686$$

górne kresy błędów wynoszą: 0,01 dla pierwszego czynnika i 0,0004 dla drugiego czynnika. Wobec tego mamy prawo twierdzić, że błąd iloczynu jest mniejszy, niż

$$42{,}65 \,.\, 0{,}0004 + 0{,}6686 \,.\, 0{,}01 + 0{,}01 \,.\, 0{,}0004$$

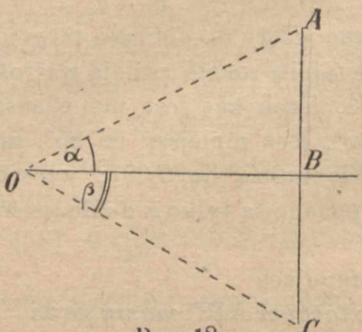
a więc tem bardziej jest mniejszy, niż

43 . 4 dziesięciotysiącznych + 67 dziesięciotysiącznych

zatem napewno mniejszy, niż

0,024.

Zadanie II. *Stojąc w odległości 83 m. od podnóża wieży, mierzymy elewację jej wierzchołka*[1]). *Obliczyć wysokość wieży, jeżeli elewacja=27°, a przyrząd, zapomocą którego mierzyliśmy kąt, znajdował się na wysokości 1,5 m. nad ziemią.*

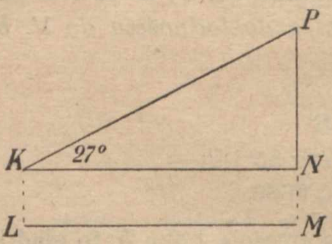


Rys. 12.

Z jaką dokładnością możemy podać wysokość wieży, jeżeli przy pomiarze kąta błąd nie dochodził do 30′, a przy pomiarze odległości mogliśmy omylić się nie więcej, niż o $^1/_2$ m.?

Jeżeli na rys. 13 (który nie jest zrobiony w skali) PM oznacza wysokość wieży, KN — odległość obserwatora od wieży, KL — wysokość przyrządu nad ziemią, wówczas

$$NM = KL = 1{,}5 \text{ m}.$$



Rys. 13.

Z trójkąta prostokątnego KPN wynika, że

$$k = p \,.\, \operatorname{tg}(PKN)$$
$$= 83 \,.\, \operatorname{tg} 27^0$$
$$= 83 \,.\, 0{,}5095.$$

Błąd, zawierający się w pierwszym czynniku, jest mniejszy od 0,5. Błąd, zawarty w drugim czynniku, ustalić możemy na podstawie tablic. Jakoż, zgodnie z warunkami zadania, mamy

$$26^0 30' < \sphericalangle PKN < 27^0 30'$$

zatem

$$0{,}4986 < \operatorname{tg}(PKN) < 0{,}5206.$$

Jeżeli położymy

$$\operatorname{tg}(PKN) = 0{,}5095$$

popełnimy błąd, mniejszy od 0,0111.

Stosując regułę na obliczenie górnego kresu błędu iloczynu, dochodzimy do wniosku, że błąd iloczynu jest mniejszy, niż

$$83 \,.\, 0{,}0111 + 0{,}5 \,.\, 0{,}5095 + 0{,}5 \,.\, 0{,}0111$$

a więc tem bardziej mniejszy, niż 1,2.

---

[1]) Jeśli prosta OB (rys. 12) jest pozioma, AC zaś pionowa i jeżeli w punkcie O znajduje się oko obserwatora, wówczas kąt $\sphericalangle AOB = \alpha$ nazywa się *elewacją* albo *kątem wzniesienia* punktu A, natomiast kąt $\sphericalangle BOC = \beta$ nazywa się *depresją* punktu C.

Ponieważ

$$83 \,.\, 0{,}5095 = 42{,}28 \ldots\ldots$$

a błąd, zawarty w tym iloczynie, jest mniejszy od 1,2, zatem możemy tylko tyle twierdzić, że

$$41{,}08 \ldots\ldots < k < 43{,}48 \ldots\ldots$$

wobec czego, jeżeli chcemy podać odpowiedź w liczbach zaokrąglonych, powiemy, że

$k = 42$ m. (z dokładnością do 1,5 m.)

$PM = 43{,}5$ m. („ „ „ „ „)

Ćwiczenia IV. 1. Znaleźć w tablicach następujące funkcje:

tg 48° 10′	tg 62° 40′	tg 15° 16′	tg 50° 08′
ctg 10° 20′	ctg 6° 30′	ctg 32° 18′	ctg 59° 05′

2. Znaleźć z dokładnością do 1′ kąty, czyniące zadość następującym równaniom:

$\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}2931$	$\mathrm{tg}\,\alpha' = 0{,}8899$	$\mathrm{tg}\,\beta = 1{,}6426$	$\mathrm{tg}\,\gamma = 1{,}1041$
$\mathrm{tg}\,\varphi = 1{,}6233$	$\mathrm{tg}\,\omega = 1{,}1092$	$\mathrm{tg}\,\psi' = 1{,}1610$	$\mathrm{tg}\,\omega' = 0{,}2075$

3. Znaleźć z dokładnością do 1′ kąty, czyniące zadość równaniom:

$\mathrm{ctg}\,\alpha = 0{,}3411$	$\mathrm{ctg}\,\beta = 0{,}6577$	$\mathrm{ctg}\,\gamma = 3{,}606$	$\mathrm{ctg}\,\delta = 4{,}113$
$\mathrm{ctg}\,\varphi = 1{,}3001$	$\mathrm{ctg}\,\omega = 1{,}4010$	$\mathrm{ctg}\,\psi' = 0{,}3326$	$\mathrm{ctg}\,\omega' = 2{,}867$

4. Zapomocą tablic znaleźć z dokładnością do 1′ kąty, czyniące zadość następującym równaniom:

$\mathrm{tg}\,2\alpha = 1{,}4388$	$\mathrm{tg}\,5\beta = 1{,}6458$	$\mathrm{tg}\,(2\psi + 10^0) = 1{,}4820$
$\mathrm{ctg}\,4\alpha = 0{,}9545$	$\mathrm{ctg}\,(2\beta + 5^0\,10') = 0{,}3574$	$\mathrm{ctg}\,(49^0 - \psi) = 1{,}5419$

5) Obliczyć kąty ostre między zwrotem dodatnim osi x-ów a każdą z prostych, łączących następujące pary punktów:

(I) punkt (3; 4) z punktem (2; 1)
(II) punkt (7; 8) z punktem (—2; 5)
(III) punkt (3; —4) z punktem (—2; —8).

6. Drzewo, mające 12,5 m. wysokości i rosnące na równinie, rzuca cień długości 16,8 m. Pod jakim kątem padają promienie słońca na płaszczyznę poziomą?

7. Stojąc nad jeziorem na wysokości 14 m. nad jego poziomem, mierzymy depresję α łodzi, płynącej po jeziorze. Obliczyć odległość łodzi od brzegu, jeżeli $\alpha = 18^0\,20'$.

8. Kąt wzniesienia wieży, zmierzony w odległości 65 m. od jej podnóża, równa się 42°; o ile metrów wieża musiałaby być wyższa, żeby kąt wzniesienia, zmierzony z tego samego punktu, równał się 58° 20′?

9. Elewację drzewa, rosnącego po drugiej stronie rzeki, mierzymy dwukrotnie: raz w punkcie A nad brzegiem rzeki, drugi raz w punkcie B, odległym od A o 25 m. Drzewo znajduje się na prostej AB. Obliczyć wysokość drzewa i odległość od A do drzewa, jeżeli znalezione elewacje równają się odpowiednio 62° i 48°?

10. Stojąc na wzgórzu na wysokości 230 m. nad równiną, mierzymy depresję szczytu i podnóża wieży kościelnej, stojącej na tej równinie.

Obliczyć wysokość wieży, jeżeli kąty depresji równają się odpowiednio 24^0 i 45^0?

11. Z okna domu, znajdującego się na wysokości h nad równiną, mierzymy kąt wzniesienia α szczytu i kąt depresji β podnóża wieży, która wznosi się na tej samej równinie. Obliczyć wysokość wieży. Czy otrzymamy wzór uległby zmianie, gdyby obserwator znajdował się na wysokości większej od wysokości wieży?

12. Obserwator widzi dwa samoloty pod kątami wzniesienia α i β i ma wrażenie, że oba samoloty znajdują się na tej samej prostej pionowej. Obliczyć wysokość samolotów nad ziemią, jeżeli wiadomo, iż naprawdę lecą one na tej samej wysokości i że odległość między niemi wynosi a metrów.

Zastosowanie: $\alpha = 15^0 30'$, $\beta = 11^0$, $a = 500$.

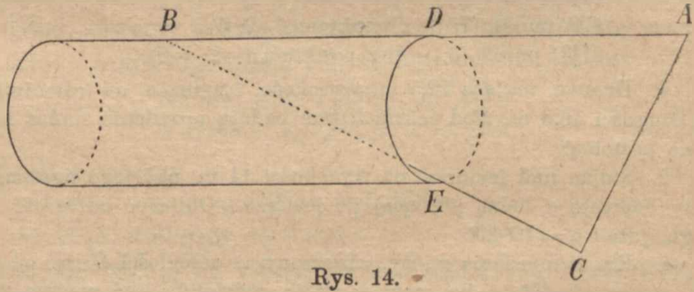
13. W ścianę pionową wmurowano poziomy pręt długości 45 cm. Jak długi cień rzuca ten pręt na ścianę w chwili, gdy promienie słońca padają pod kątem $23^0 20'$ do poziomu?

14. Balon wznosi się pionowo. W chwili, gdy znajduje się on na wysokości h metrów nad ziemią, lotnik mierzy kąt depresji pewnego przedmiotu na ziemi. Po upływie t sekund powtarza ten pomiar. Z jaką prędkością średnią wznosi się balon, jeżeli pierwszy kąt $= \alpha$, drugi $= \beta$?

15. Kolej zębata, wiodąca na szczyt Rigi w Szwajcarji, ma w najbardziej stromem miejscu 25% spadku. Obliczyć kąt, pod którym wznosi się w tem miejscu kolej. (Spadkiem nazywamy stosunek wysokości do odległości poziomej).

16. Chcąc zmierzyć średnicę rurki, wsuwamy w nią trójkąt ABC (rys. 14), którego kąt $B = 25^0$, i mierzymy długość odcinka BD. Obliczyć średnicę rurki, jeżeli $BD = 5{,}2$ cm.

Czy można zastosować ten sposób mierzenia, jeżeli brzegi rurki nie są równo obcięte?



Rys. 14.

17. Rozpięcie dachu równa się 30 m., wysokość dachu wynosi 3,5 m.; jaki kąt tworzą płaszczyzny dachu z poziomem?

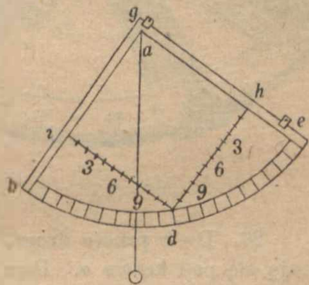
18. Rurkę barometru nachylono pod kątem $40^0 30'$ do pionu. Jak długi jest słupek rtęci w barometrze, jeżeli w chwili doświadczenia ciśnienie atmosferyczne $= 766$ mm. rtęci?

19. Z jaką dokładnością podać można odpowiedź w zadaniu poprzedniem, jeżeli przy pomiarze kąta mogliśmy popełnić błąd nie większy od $40'$?

20. Z jaką dokładnością podać można odpowiedź w zadaniu 13, jeżeli długość pręta znamy z dokładnością do 0,1 cm. a wysokość słońca — z dokładnością do 5'?

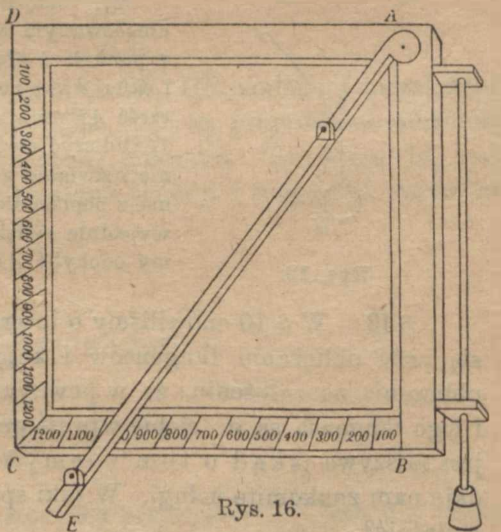
21. Cesarz chiński Czu-Kong (XII w. przed Chr.) znalazł, że pręt pionowy, mający 8 jednostek długości, rzuca o południu najdłuższego dnia cień długości 1,54 jednostek, o południu zaś najkrótszego dnia cień miał 13,12 jednostek długości. Na zasadzie tych spostrzeżeń obliczył on nachylenie ekliptyki (które równa się średniej arytmetycznej wysokości słońca o południu najdłuższego i najkrótszego dnia). Powtórzyć to obliczenie i wynik porównać ze znanem z kursu geografji nachyleniem ekliptyki.

22. Z jaką dokładnością można byłoby podać odpowiedź w zadaniu poprzedniem, gdyby długość pręta można było wyznaczyć z dokładnością do 1%, długość zaś cienia z dokładnością do 3%?



Rys. 15.

23. Rys. 15 wyobraża przyrząd, zwany *kwadrantem* i używany gdzieniegdzie w wiekach średnich (opisuje go np. w XIII w. matematyk włoski Leonard Pizańczyk, zwany pospolicie Fibonacci). Kąt ∢ *bge* jest prosty; w punkcie *g* zawieszony jest na nitce ciężarek; chcąc zmierzyć kąt, celujemy wzdłuż prostej *ge*. Jak widać z rysunku, *gidh* jest kwadratem. Objaśnić: 1) w jaki sposób mierzyć można tym przyrządem depresję? 2) w jaki sposób, nie mając tablic pod ręką, możemy na tym przyrządzie odczytać tangens kąta depresji? 3) jak należałoby zmienić budowę kwadrantu, żeby móc mierzyć nim z równą łatwością elewację i depresję? 4) jaka podziałka na bokach kwadratu byłaby najdogodniejsza do odczytywania tangensów?

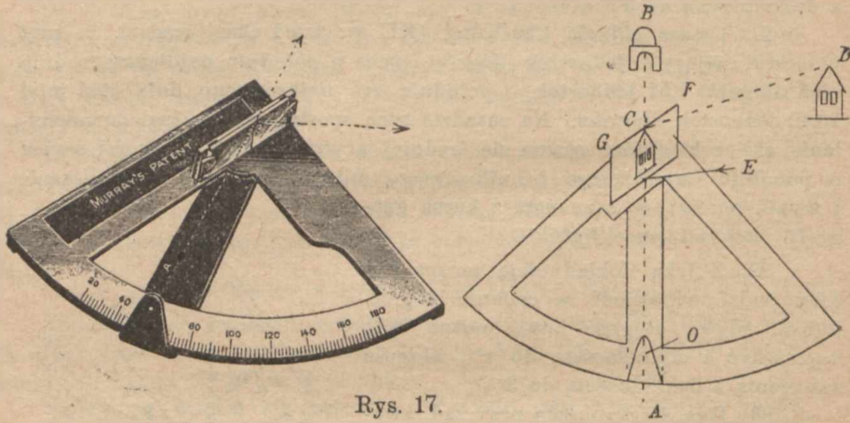


Rys. 16.

24. Rys. 16 wyobraża t. zw. *kwadrat Peurbacha* (XVI w.). Celujemy wzdłuż pręta *AE*, który osadzony jest na zawiasie w punkcie *A* ślizga się po bokach kwadratu. Dwa boki kwadratu podzielone są każdy na 1200 części równych. Wyjaśnić na przykładzie liczbowym sposób mierzenia kątów zapomocą kwadratu Peurbacha.

25. W wielu szkołach angielskich przy nauce trygonometrji dokonywają uczniowie pomiarów zapomocą przyrządu, wyobrażonego na

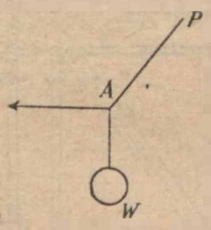
rysunku 17 i składającego się z kątomierza z ruchomą celownicą i lusterkiem. Wyjaśnić, w jaki sposób można tym przyrządem zmierzyć kąt ∢ BCD.



Rys. 17.

26. Dwie proste drogi, biegnące pomiędzy wysokiemi murami, przecinają się pod kątem α. Dwaj cykliści, jadący każdy środkiem tych dróg, w kierunku ich skrzyżowania, dostrzec mogą jeden drugiego w chwili, gdy są w jednakowej odległości od punktu, w którym krzyżują się środki dróg. Jak wielka jest wtedy odległość między cyklistami, jeżeli szerokość każdej drogi $= a$ m.

Zastosowanie: $a = 25$ m., $\alpha = 52^0$.



Rys. 18.

27. Ciało W zostało zawieszone na sznurku. umocowanym w punkcie P. Na sznurek działa w punkcie A siła, równająca się ciężarowi 20 kg, i skierowana poziomo. Pod działaniem tej siły część AP sznurka odchyliła się od pionu o 35^0. 1) Obliczyć ciężar ciała W. 2) To samo zadanie rozwiązać graficznie (rysunek 18) i porównać z poprzednio otrzymanym wynikiem. 3) O ile wypadnie zwiększyć siłę poziomą, jeżeli chcemy odchylić AP o kąt 1½, 2 razy większy?

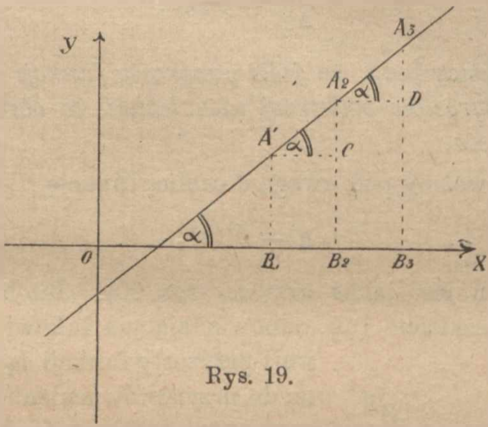
§ **13.** W § 10 mówiliśmy o interpolacji, którą posługujemy się przy obliczaniu tangensów i kotagensów. Oparliśmy nasze obliczenia na założeniu, że w pewnym przedziale przyrosty kąta i jego tangensa są do siebie wprost proporcjonalne. Założenie to jest fałszywe (s k ą d o t e m w i e m y?), a jednak w praktyce oddaje nam znakomite usługi. W jaki sposób możemy sobie ten fakt wyjaśnić?

Niech będą dane dwie wielkości zmienne x i y, których przyrosty (dowolnej wielkości i dowolnego znaku — a więc zarówno ujemne, jak dodatnie) oznaczmy odpowiednio przez Δx i Δy.

Załóżmy, że przyrosty tych zmiennych są do siebie zawsze wprost proporcjonalne, t. j. że

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{const.}$$

i spróbujmy przedstawić to zagadnienie graficznie.



Rys. 19.

Niech A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 będą trzema wartościami pewnej funkcji

$$y = f(x),$$

odpowiadającemi wartościom OB_1, OB_2, OB_3 zmiennej niezależnej. W takim razie zarówno A_1C, jak A_2D są przyrostami zmiennej niezależnej i mogą być oznaczone przez Δx. Tak samo CA_2 oraz DA_3 są odpowiedniemi przyrostami funkcji i mogą być oznaczone przez Δy.

Łatwo dostrzec, że

$$\frac{CA_2}{A_1C} = \text{tg}\,(A_2A_1C)$$

$$\frac{DA_3}{A_2D} = \text{tg}\,(A_3A_2D),$$

jeśli więc twierdzimy, że stosunek przyrostów $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ jest dla naszej funkcji liczbą stałą, znaczy to, że

$$\text{tg}\,(A_2A_1C) = \text{tg}\,(A_3A_2D),$$

zatem $$\sphericalangle A_2 A_1 C = \sphericalangle A_3 A_2 D$$

i punkty A_1, A_2, A_3 leżą na jednej prostej.

I odwrotnie: jeżeli punkty A_1, A_2, A_3 leżą na jednej prostej, wówczas

$$\operatorname{tg}(A_2 A_1 C) = \operatorname{tg}(A_3 A_2 D),$$

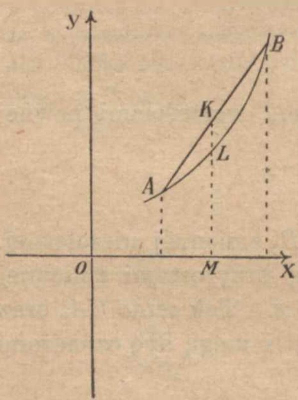
czyli $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{const.}$$

Dowiedliśmy tedy, że *jeśli przyrosty funkcji są proporcjonalne do przyrostów zmiennej niezależnej, to obrazem funkcji jest linja prosta.*

A teraz weźmy pod uwagę dowolną funkcję

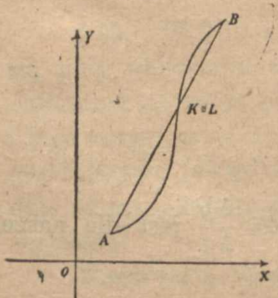
$$y = F(x),$$

której obrazem jest jakaś krzywa (rys. 20). Jeżeli założymy, że w pewnym przedziale (np. odpowiadającym łukowi AB tej krzywej) przyrosty funkcji są proporcjonalne do przyrostów zmiennej niezależnej, znaczy to, że obraz funkcji uważamy w tym przedziale za odcinek linji prostej, czyli, że łuk AB krzywej zastępujemy cięciwą AB. Jeżeli na zasadzie naszego założenia zechcemy obliczyć wartość funkcji (t. j. rzędną), odpowiadająca wartości OM zmiennej niezależnej, to zamiast rzędnej ML (jak być powinno) otrzymamy rzędną MK odpowiedniego punktu cięciwy.



Rys. 20.

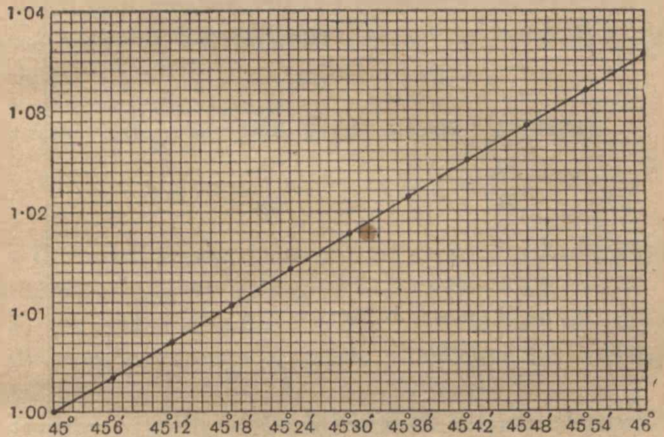
Popełniony błąd równa się długości odcinka LK. Na rys. 20 błąd ten jest dodatni. Jaki kształt musiałaby mieć krzywa, żeby błąd był ujemny? [1])



Rys. 20a.

[1]) Przypadkowo może się zdarzyć, że błąd ten równa się zeru, jak np. na rys. 20a. Czy można pomyśleć sobie inny kształt krzywej, przy którym również błąd przy interpolacji w jakimś punkcie byłby równy zeru?

Rysunki 21 i 22 wyobrażają łuki tangensoidy: pierwszy w przedziale od 45^0 do 46^0, drugi w przedziale od 87^0 do 88^0.



Rys. 21.

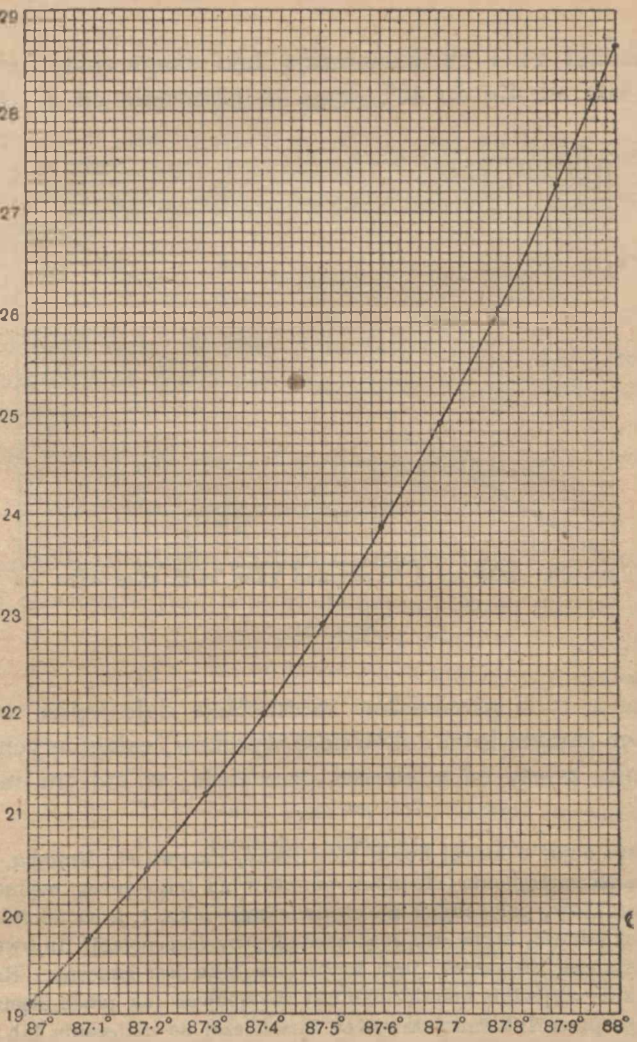
W którym z tych przedziałów interpolacja daje lepsze wyniki? Czy na tym samym łuku dokładność wyników, osiągniętych przez interpolację, zależy od wielkości przedziału, w którym interpolujemy?

Interpolacja, o której dotąd mówiliśmy, nazywa się *linjową*, ponieważ polega na zastąpieniu rzędnych punktów na łuku przez rzędne odpowiednich punktów, położonych na cięciwie tego łuku, t. j. na odcinku linji prostej. Dokładność, którą osiągnąć można przy interpolacji linjowej, często nie wystarcza, zwłaszcza, jeśli krzywizna łuku jest znaczna. Radzimy sobie w takim wypadku inaczej: zamiast zastępować łuk przez cięciwę, zastępujemy go przez łuk innej krzywej, łatwiejszej do obliczenia lub do wykreślenia. Mamy wtedy do czynienia z interpolacją wyższego stopnia.

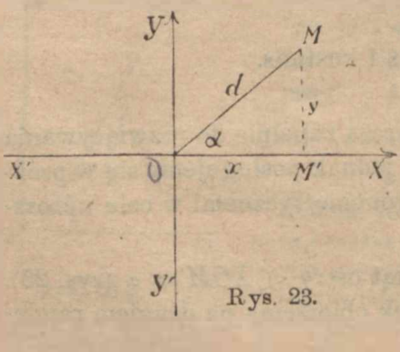
Funkcje sinus i kosinus.

§ **14**. Funkcja tangens wystarcza zupełnie do rozwiązywania trójkątów prostokątnych, niemniej jednak posługujemy się w praktyce innemi jeszcze funkcjami trygonometrycznemi w celu uproszczenia rachunków.

Niech będzie dany dowolny kąt ostry $\sphericalangle XOM = \alpha$ (rys. 23). Uczeń dowiedzie sam, że jakkolwiek obierzemy na drugiem ramie-



Rys. 22.



Rys. 23.

niu kąta punkt M (którego spółrzędne oznaczamy przez x, y, odległość zaś OM od punktu zerowego przez d), zawsze oba stosunki

$$\frac{y}{d} \quad \text{oraz} \quad \frac{x}{d}$$

będą stałe, dopóki kąt α pozostaje bez zmiany.

Otóż pierwszy z tych stosunków nazywamy **sinusem** kąta; oznaczamy go symbolem

$$\sin\alpha \quad \text{lub} \quad \sin(XOM),$$

drugi zaś nazywamy **kosinusem** (po łacinie: cosinus) i oznaczamy symbolem

$$\cos\alpha \quad \text{lub} \quad \cos(XOM).$$

Mamy tedy następujące **określenia sinusa i kosinusa**:

$$\sin\alpha = \frac{y}{d}, \qquad \cos\alpha = \frac{x}{d}, \tag{III}$$

§ **15**. Liczby, które nazwaliśmy sinusem i kosinusem, są stałe dla danego kąta, nasuwają się tu jednak dwa pytania:

1) czy liczby te są zależne od wielkości kąta ostrego α?

2) jeżeli tak, to w jaki sposób zmieniają się one wraz ze zmianą kąta?

Innemi słowami, będziemy musieli zbadać, czy zmieniają się i w jaki sposób zmieniają się stosunki

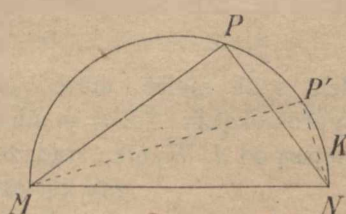
$$\frac{y}{d} \quad \text{oraz} \quad \frac{x}{d}$$

gdy zmieniamy kąt ostry α.

Aby ułatwić to badanie, najwłaściwiej będzie uczynić jeden z wyrazów każdego stosunku stałym. Jeżeli np. zdecydujemy się uważać d za liczbę stałą, wówczas zagadnienie nasze sprowadzi się do następującego:

W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna pozostaje stała; w jaki sposób zmieniają się przyprostokątne, jeżeli jeden z kątów ostrych maleje lub rośnie?

Niech będzie dany trójkąt prostokątny MNP (rys. 24), na którym opisaliśmy półkole. Jeżeli zmniejszymy kąt ostry $\sphericalangle M$, otrzymamy nowy trójkąt prostokątny MNP', przyczem półprosta MP' musi leżeć wewnątrz kąta $\sphericalangle NMP$. Wobec tego musi być



Rys. 24.

$$\smile P'KN < \smile PKN$$

a więc również $\quad P'N < PN \quad$ (dlaczego?)

Jeżeli zmniejszyliśmy jeden kąt ostry trójkąta, to drugi musiał wzrosnąć, mamy tedy nierówność

$$\sphericalangle P'NM > \sphericalangle PNM,$$

a stąd wynika, że $P'M > PM$ (dlaczego?)

Widzimy tedy, że *jeśli przeciwprostokątna pozostaje stała, kąt zaś ostry maleje, to przeciwległa temu kątowi przyprostokątna również maleje, przyległa rośnie.*

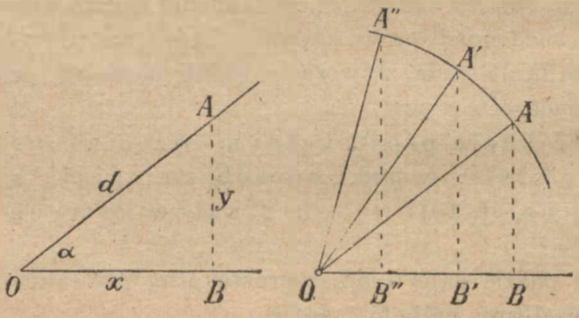
(Uczeń odpowie sam na pytanie, co dzieje się z bokami, jeżeli kąt ostry rośnie?)

Teraz już odpowiedź na pytanie, dotyczące zmian sinusa i kosinusa, nie przedstawia trudności.

Niech będzie dany jakikolwiek kąt ostry α (rys. 25). Wyobraźmy sobie, że jedno jego ramię leży na osi x-ów, drugie zaś ramię obraca się dokoła wierzchołka O, będącego zarazem punktem zerowym układu spółrzędnych. Na tem drugiem ramieniu obierzmy punkt A o spółrzędnych x, y i niech będzie $OA = d$ wielkością stałą. Wiemy, że

$$\sin\alpha = \frac{y}{d}, \quad \cos\alpha = \frac{x}{d}.$$

Jeżeli zwiększać będziemy kąt ostry α (tak, iż drugie jego ramię przybierać będzie położenia OA, OA', OA'' i t. d.), wówczas przeciwkątna d pozostanie stała, natomiast przyprostokątna $OB = x$



Rys. 25.

będzie stale maleć i może stać się dowolnie małą, a jednocześnie przyprostokątna $AB = y$ musi stale rosnąć, pozostając jednak mniejszą od d. Wynika stąd, że

gdy kąt ostry α rośnie, to

$\sin\alpha$ rośnie, lecz pozostaje mniejszy od 1,
$\cos\alpha$ maleje i może stać się dowolnie małą liczbą dodatnią.

Jeżeli, przeciwnie, kąt α maleje, to

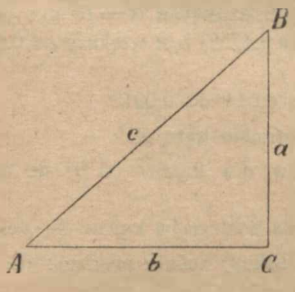
$\sin\alpha$ maleje i może stać się dowolnie małą liczbą dodatnią,
$\cos\alpha$ rośnie, pozostając mniejszym od 1. (dlaczego?)

§ **16**. Z powyższego widzimy, że sinus i kosinus kąta ostrego przybierać mogą wszelkie wartości od 0 do 1, przyczem każdemu ostremu kątowi odpowiada określona w zupełności wartość sinusa i kosinusa. I odwrotnie: każdą liczbę, zawartą między 0 i 1, uważać możemy za sinus albo za kosinus jakiegoś kąta ostrego. Kąt ten jest w zupełności wyznaczony, jeżeli mamy dany jego sinus albo też kosinus.

Tak więc sinus i kosinus są *funkcjami* kąta.

§ **17**. Pokażemy teraz, w jaki sposób zastosować można te dwie funkcje do rozwiązywania trójkątów prostokątnych.

Zadanie. *Rozwiązać trójkąt prostokątny* ABC (rys. 26), *mając daną przeciwprostokątną* c *i kąt ostry* A.



Rys. 26.

Jeżeli wyobrazimy sobie, że wierzchołek A jest punktem zerowym, a przyprostokątna AC leży na dodatnim zwrocie osi x-ów, wówczas spółrzędnemi punktu B są długości odcinków b i a. Na mocy określenia sinusa i kosinusa mamy równanie:

$$\sin A = \frac{a}{c}, \text{ skąd } \quad a = c \cdot \sin A$$

$$\cos A = \frac{b}{c}, \text{ skąd } \quad b = c \cdot \cos A.$$

Mamy tedy następującą:

Regułę III. *Długość przyprostokątnej równa się sinusowi kąta przeciwległego, pomnożonemu przez długość przeciwprostokątnej* oraz *długość przyprostokątnej równa się kosinusowi kąta przyległego, pomnożonemu przez długość przeciwpostokątnej.*

§ **18**. Stosując powyższą regułę do sinusa i kosinusa kąta B w tym samym trójkącie, mamy

$$a = c \cdot \cos B$$
$$b = c \cdot \sin B,$$

porównywając zaś te wzory z otrzymanemi w paragrafie poprzednim, widzimy, że

$$\sin A = \cos B$$
$$\cos A = \sin B.$$

Ponieważ między kątami ostremi A i B zachodzi związek

$$B = 90^0 - A,$$

zatem możemy napisać, że

$$\mathbf{sin}\ A = \mathbf{cos}\ (90^0 - A)$$
$$\mathbf{cos}\ A = \mathbf{sin}\ (90^0 - A)$$

Zestawiając te wzory z anologicznemi wzorami dla tangensów i kotangensów kątów dopełniających, możemy powiedzieć ogólnie, że *funkcje kąta ostrego równają się kofunkcjom kąta dopełniającego.*

Ćwiczenia V. 1. Zbudować kąty α, β, γ, δ, φ, ω, czyniące zadość następującym równaniom:

$\sin\alpha = \frac{3}{4}$; $\quad$ $\sin\beta = \frac{1}{5}$; $\quad$ $\sin\gamma = 0{,}92$

$\cos\delta = \frac{2}{7}$; $\quad$ $\cos\varphi = 0{,}46$; $\quad$ $\cos\omega = \frac{12}{17}$.

2. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątna $a = 10$ m.; jak wielka musi być przeciwprostokątna c, żeby sin (ABC) był większy od 0,9? od 0,99? od 0,999?

Żeby sin (ABC) był mniejszy od 0,1? od 0,01? od 0,001?

3. Rozwiązać analogiczne pytanie o kosinusie kąta A.

4. Zbudować graficznie tabelkę sinusów dla kątów od 0^0 do 90^0 w odstępach co 10^0.

Czy tabelka ta może służyć do znajdowania kosinusów kątów ostrych?

5. Kąt ostry α rośnie; która z dwóch funkcyj rośnie prędzej: sin α czy tg α? Która prędzej maleje: cos α czy ctg α?

6. Opierając się na znanych twierdzeniach geometrycznych, obliczyć sinusy i kosinusy kątów 30^0, 45^0, 60^0.

7. W § 15 przy badaniu zmian sinusa i kosinusa zakładaliśmy, że we wzorach $\sin\alpha = \frac{y}{d}$, $\cos\alpha = \frac{x}{d}$ mianownik d jest liczbą stałą. Powtórzyć te badania, zakładając, że mianownik d jest zmienny, natomiast albo x jest stałe, albo y jest stałe. [**Wskazówka**: porównaj Ćwiczenia II, 9].

8. Obliczyć wszystkie funkcje trygonometryczne kątów ostrych A i B w trójkącie prostokątnym ABC, mając dane następujące długości jego boków a, b, c:

(I) 9; 40; 41 $\quad$ (II) $1\frac{1}{2}$; 2; $2\frac{1}{2}$ $\quad$ (III) 0,5; 1,2; 1,3.

9. Obliczyć wszystkie funkcje trygonometryczne kątów ostrych A i B w trójkącie prostokątnym ABC, w którym między bokami zachodzi jeden z następujących związków:

(I) $a = 2b$ $\quad$ (II) $5a = 4c$ $\quad$ (III) $4\,(a + b) = 5c$.

10. Zapomocą tablic czterocyfrowych znaleźć

$\sin 15^0 20'$ $\quad$ $\sin 48^0 17'$ $\quad$ $\sin 72^0 39'$

$\cos 8^0 40'$ $\quad$ $\cos 35^0 05'$ $\quad$ $\cos 84^0 42'$.

11. Znaleźć kąty, czyniące zadość następującym równaniom:

$\sin\alpha = 0{,}8418$	$\sin\varphi = 0{,}9540$	$\sin\omega = 0{,}3211$
$\cos\beta = 0{,}9805$	$\cos\psi = 0{,}6766$	$\cos\gamma = 0{,}5560.$

12. Rozwiązać trójkąt prostokątny ABC (gdzie $C = 90^0$), mając dane:

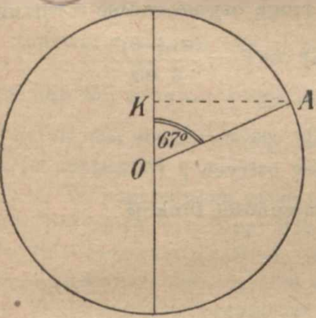
(I) $c = 15$; $A = 42^0\,12'$	(II) $c = 22{,}8$; $A = 66^0\,40'$
(III) $c = 45$; $B = 9^0\,10'$	(IV) $c = 52{,}1$; $B = 74^0\,35'$
(V) $c = 119$; $a = 50$	(VI) $c = 94{,}2$; $b = 31{,}5.$

13. Z jaką dokładnością obliczyć można boki a, b w przykładach (I) i (II) poprzedniego zadania, jeżeli c dane jest z dokładnością do 0,1 a kąt A — z dokładnością do $2'$?

14. Droga wznosi się pod kątem $10^0\,35'$. Na ile metrów wznieśliśmy się po przebyciu 2 klm. tej drogi?

15. Droga wznosi się pod kątem $14^0\,10'$. Jak długą drugę musimy przybyć, żeby wznieść się o 300 m.?

16. Koło o promieniu 12,5 cm. toczy się po płaszczyźnie poziomej. W pewnej chwili punkt A okręgu znajdował się w położeniu najwyższem. Na jakiej wysokości nad płaszczyzną poziomą znajduje się obecnie punkt A, jeżeli koło obróciło się o 67^0?



Rys. 27.

Z jaką dokładnością podać można odpowiedź, jeżeli przy pomiarze kąta mogliśmy popełnić błąd nie większy od $10'$, a promień zmierzyliśmy z dokładnością do 0,1?

17. W rombie $ABCD$ mamy dane $a = 16{,}2$; $A = 104^0\,20'$. Obliczyć długości przekątnych.

18. W równoległoboku $ABCD$ mamy dane $a = 18$; $b = 45$; $A = 62^0\,18'$. Obliczyć obie jego wysokości.

19. Przekątna rombu jest $\frac{5}{3}$ razy większa od jego boku; obliczyć kąty rombu.

20. Torpedowiec, płynąc z prędkością $30\ \frac{\text{mil}}{\text{godz.}}$ w kierunku $N\ 48^0\ E$ czyli w kierunku, który o 48^0 odchyla się na wschód od północy, spostrzega o godz. 10-ej na swej drodze w odległości 14 mil morskich okręt. Okręt ten płynie z prędkością $10\ \frac{\text{mil}}{\text{godz.}}$ wprost na wschód. Kiedy torpedowiec znajdować się będzie dokładnie na północ od okrętu? Z jaką dokładnością oznaczyć można tę chwilę, jeżeli wszystkie dane w zadaniu liczby uważamy za dokładne?

21. Zapomocą tablic rozwiązać równania:

$$\sin(3\varphi + 12^0) = 0{,}7009$$
$$\sin(2\omega - 5^0\,18') = 0{,}5534.$$

22. Zbudować kąty ostre α, β, γ, czyniące zadość równaniom

$$\sin \alpha = 2 \cos \alpha$$
$$\operatorname{tg} \beta = 3 \operatorname{ctg} \beta$$
$$\operatorname{tg} \gamma = 2 \sin \gamma.$$

Otrzymane kąty zmierzyć z możliwą dokładnością i porównać wynik z wartościami odpowiednich funkcyj trygonometrycznych, podanemi w tablicach.

23. Opierając się na określeniach funkcyj trygonometrycznych, wykazać, że dla każdego kąta ostrego α zachodzą następujące dwie nierówności:

$$\text{(I)} \sin \alpha + \cos \alpha > 1 \qquad \text{(II)} \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha \geqq 2.$$

Przy jakiej wartości kąta α mamy

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 2?$$

24. W taki sam sposób, jak w zadaniu poprzedniem, zbadać, czy prawdziwa jest nierówność

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 < 1.$$

25. Zbadać, czy liczby dodatnie a i b mogą czynić zadość równaniom

$$\text{(I)} \sin \alpha = \frac{a^2 + b^2}{2\,ab} \qquad \text{(II)} \cos \beta = \frac{(a + b)^2}{4\,ab}.$$

26. Czy równania

$$\text{(I)} \sin x = 2 \sin \beta \qquad \text{(II)} \cos x = 2 \cos \omega$$

możliwe są przy wszelkich wartościach kątów ostrych β i ω?

27. Przedstawić graficznie przebieg zmienności funkcji

$$y = \sin x$$

gdy x zmienia się od 0^0 do 90^0.

28. To samo dla funkcji $y = \cos x$.

Czy te dwie krzywe (zwane *sinusoidą* i *kosinusoidą*) przecięłyby się i w jakim punkcie, gdyby były wykreślone na tym samym rysunku?

29. W jaki sposób zmieniają się funkcje

$$y = \frac{1}{\sin x} \quad \text{oraz} \quad y = \frac{1}{\cos x}.$$

Naszkicować odpowiednie krzywe.

30. Zapomocą wykresu krzywych $y = \sin x$ oraz $y = \cos x$ rozwiązać (w przybliżeniu) równanie

$$\sin x - \cos x = 0{,}5.$$

Wynik sprawdzić zapomocą tablic.

31. W jaki sposób zmienia się funkcja $y = 1 + \cos x$, gdy x rośnie od 0^0 do 90^0?

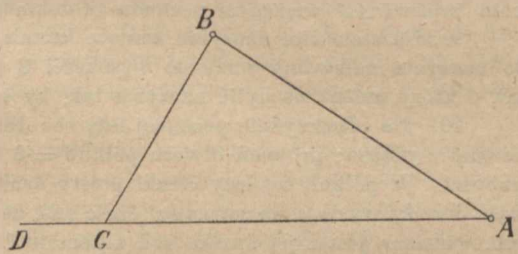
32. To samo pytanie w zastosowaniu do funkcji $y = \frac{1}{2 - \sin x}$.

33. W rachunkach przybliżonych posługują się niekiedy następującą regułą: Sinus kąta nie większego od 30^0 zastąpić można w rachunku przez $^1/_6$ część liczby stopni tego kąta. Jaki jest sens geometryczny tej reguły?

Zbadać, jak wielki błąd popełniamy przy $x = 5^0$, 10^0, 15^0 i t. d.

Ćwiczenia VI. 1. Plac tenisowy winien mieć kształ prostokąta o wymiarach 78 × 36 stóp. Przy zakładaniu takiego placu odmierzono przez pomyłkę bok $AB = 36{,}5$ stóp, $BC = 78$ st., $CD = 36$ st.; kąty B i C odmierzono poprawnie. O ile kąt A różni się wskutek tego od 90^0?

2. Mechanizm, przedstawiony schematycznie na rys. 28, składa się z nieruchomego pręta AD i dwóch prętów ruchomych AB i BC. Pręt AB obraca się dokoła A, pręt BC został w punkcie B połączony zawiasem z prętem AB, drugi zaś jego koniec C zmuszony jest do ślizgania się po AD. Jaka jest największa możliwa wartość kąta $\sphericalangle BAC$, jeżeli $AB = 90$ cm, $BC = 60$ cm.?



Rys. 28.

3. Dwaj marynarze włażą po linach na maszt, mający 30 stóp wysokości. Pierwszy porusza się z prędkością $1 \frac{\text{st.}}{\text{sek.}}$ po linie, tworzącej z masztem kąt 45^0, drugi—z prędkością $1{,}25 \frac{\text{st.}}{\text{sek.}}$ po linie, nachylonej do masztu pod kątem 49^0. Który z nich pierwszy dosięgnie wierzchołka, jeżeli wyruszyli jednocześnie?

4. W poprzedniem zadaniu niech będą v_1 i v_2 prędkości obu marynarzy, przyczem $v_1 = 2v_2$. Jaki związek zachodzi między kątami α i β, które liny tworzą z masztem, jeżeli majtkowie, wyruszając jednocześnie, dosięgają również jednocześnie szczytu?

Jakie wartości przybierać może większy z tych dwu kątów?

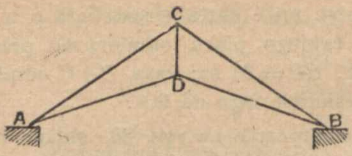
Znaleźć kąt β, jeżeli $\alpha = 70^0$.

5. Statek, płynący wprost na południe z prędkością $22 \frac{\text{mil}}{\text{g.}}$, widzi o godzinie 10-tej latarnię morską o 24^0 na wschód od południa, w pół godziny zaś potem widzi ją o 37^0 na wschód od południa. O której godzinie statek znajdować się będzie w najmniejszej odległości od latarni?

Obliczyć tę odległość, jak również odległości statku od latarni w chwili pierwszej i drugiej obserwacji.

6. Ile czasu trzeba, aby przejść na drugą stronę ulicy, jeżeli poruszamy się z prędkością $v \frac{\text{m.}}{\text{sek.}}$, szerokość ulicy równa się b m., a droga nasza tworzy z chodnikiem kąt α?

7. Dwa samochody jadą jeden za drugim w odstępie d m., przyczem oba poruszają się z prędkością $v \frac{\text{sek.}}{\text{m.}}$ i oba mają tę samą szerokość $= b$ m. Przechodzeń zaledwie zdążył przemknąć się pomiędzy temi dwoma samochodami. Z jaką prędkością musiał biec przechodzeń, jeżeli droga jego tworzyła kąt α z drogą samochodów?



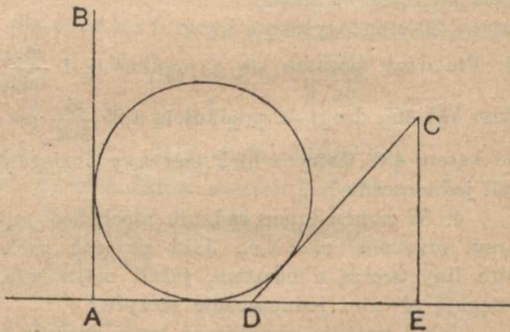
Rys. 29.

8. Rys. 29 przedstawia przekrój wiązania dachu. Krokwie AC i BC nachylone są pod kątem 36^0 do linji poziomej AB i mają po 8,5 m. długości. CD ma 3,5 m. długości. Obliczyć: (1) rozpięcie AB; (2) wysokość dachu; (3) długość krokwi AD; (4) kąt nachylenia krokwi AD względem poziomu (z dokładnością do 1^0).

9. Na stole stoi naczynie, mające kształt półkuli o promieniu 8 cm. Do naczynia nalewamy wody do wysokości 3 cm. Jaki jest największy kąt, o który można pochylić naczynie tak, by woda nie wylewała się?

10. Na płaszczyźnie poziomej leży otworem do góry półkula żelazna, wewnątrz próżna; promień otworu półkuli = 6 cm., a ścianki mają $^1/_2$ cm. grubości. W półkuli tej leży cienki prosty drucik długości 13 cm., tak, że część drucika wystaje na zewnątrz, część zaś, znajdująca się wewnątrz półkuli, widziana jest z jej środka pod kątem 100^0. Na jakiej wysokości nad stołem znajdują się górny i dolny koniec drucika?

11. Rys. 30 przedstawia rzut walca, który leży na ziemi i opiera się o mur AB. Chcąc podnieść ten walec nieco wyżej, podsuwamy pod niego równię pochyłą CDE. Wiemy, że $\sphericalangle CDE = 25^0 30'$, a promień podstawy walca = 1,45 m.; obliczyć, o jaką wysokość podniesiemy walec, jeżeli równię wsuniemy możliwie najgłębiej.

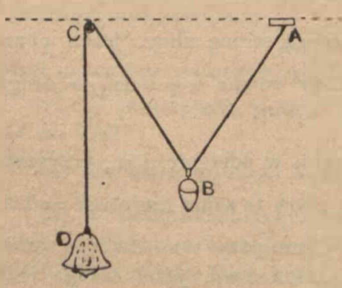


Rys. 30.

12. Dwie prostopadłe do siebie siły f_1 i f_2 działają na ten sam punkt. Obliczyć wielkość i kierunek siły wypadkowej.

Zastosowanie: $f_1 = 20$ dyn, $f_2 = 45$ dyn.

13. Rysunek 31 wyobraża lampkę, zawieszoną u sufitu na giętkim drucie $DCBA$. Drut został umocowany w punkcie A i przerzucony przez bloczek C, którego wymiarów nie uwzględniamy w rachunku. B jest to naczynie, do którego w miarę potrzeby nasypujemy śrótu, aby zrównoważyć ciężar lampki. Układ sił jest w równowadze, gdy $AB = AC = BC = {}^3/_2$ m. Lampka waży 500 gr. 1) Ile waży śrót w naczyniu B, jeżeli samo naczynie waży 80 gr.? 2) O ile podniesie się B, jeżeli lampkę opuścimy o 30 cm.? 3) Ile potrzeba śrótu w tem drugiem położeniu do zrównoważenia lampki? (Ciężaru drutu nie bierzemy w rachubę)



Rys. 31.

14. Dwie kulki zaczynają spadać jednocześnie: jedna po prostej pionowej AO, druga po prostej pochyłej BO. Obliczyć kąt między temi dwiema prostemi, jeżeli wiadomo, że $AO = 2\,BO$ i że obie kulki jednocześnie dosięgają punktu O.

15. W płaszczyźnie pionowej leży koło, którego średnica AB jest prostopadła do płaszczyzny poziomej. Z punktu A spadają pod działaniem siły ciężkości punkty materjalne; jeden z nich spada po średnicy AB, inne— po cięciwach AC, AD, ... Który z tych punktów prędzej dosięgnie drugiego końca cięciwy? Czy prędkości tych punktów w chwili, gdy każdy z nich dosięga końca swej cięciwy, są jednakowe? Jeżeli nie, to jaki między niemi zachodzi stosunek?

16. Opierając się na poprzedniem zadaniu, rozwiązać konstrukcyjnie następujące zadanie: w płaszczyźnie pionowej dana jest prosta PQ (nie pozioma) i punkt A, nie leżący na tej prostej. Po jakiej prostej winien spadać z A punkt materjalny, aby mógł dosięgnąć prostej PQ w czasie jak najkrótszym?

17. To samo zadanie w założeniu, że zamiast prostej PQ dany jest okrąg koła, nie przechodzący przez A.

18. Samochód jedzie z prędkością $40 \frac{\text{km.}}{\text{g.}}$ podczas deszczu. Krople deszczu padają pionowo, podróżnym jednak wydaje się, że deszcz pada pod kątem 60^0 do poziomu. Z jaką prędkością spadają krople deszczu?

19. Niech CD będzie wysokością w trójkącie prostokątnym $\triangle ABC$ Dowieść znanych twierdzeń geometrycznych

$$AC^2 = AB \,.\, AD \quad \text{oraz} \quad CD^2 = AD \,.\, DB$$

wyrażając w dwojaki sposób $\cos A$ i $\operatorname{tg} A$.

20. Zapomocą trygonometrji dowieść, że suma prostopadłych, poprowadzonych w trójkącie równoramiennym z dowolnego punktu podstawy do obu równych boków, równa się wysokości, poprowadzonej do jednego z tych boków.

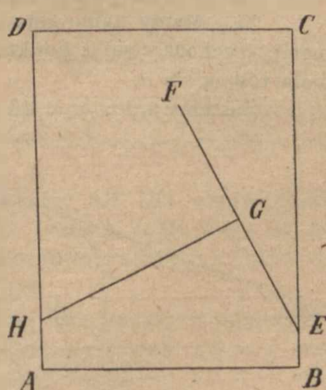
21. Jeżeli w poprzedniem zadaniu D jest punktem na podstawie, jak wielka jest suma rzutów odcinków AD, DB podstawy na równe boki?

22. Dwa nierównoległe boki AB, CD trapezu równają się odpowiednio a cm i c cm. Obliczyć kąty trapezu, jeżeli wiemy, że przedłużenia tych boków przecinają się pod kątem prostym.

23. W trójkącie równoramiennym $\triangle ABC$ obliczyć (1) promień ρ koła wpisanego, (2) promień R koła opisanego, mając dane: podstawę c trójkąta i kąt ostry A.

24. W trapezie równoramiennym mamy dane obie podstawy b, d i kąt ostry A. Obliczyć: (1) pole trapezu; (2) przekątne e, f; (3) równe boki a, c.

25. Obliczyć szerokość AB prostokąta $ABCD$ (rys. 32), mając dane, że $FG = GE = 17$ cm., $GH = 30$ cm., $\sphericalangle GHD = 64^0$ i że $GH \perp FE$.



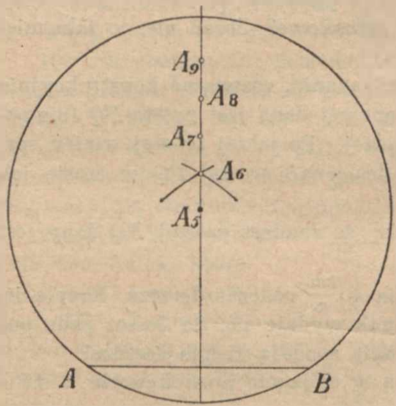
Rys. 32.

26. Bok rombu $= 20$ cm., kąt ostry rombu $= 44^0$. Obliczyć (1) przekątne; (2) promień koła wpisanego.

27. Obliczyć bok dwudziestokąta foremnego, wpisanego w koło o promieniu 40 cm.

28. Bok dziewięciokąta foremnego $= 8$ cm.; obliczyć (1) pole wielokąta; (2) promień koła opisanego.

29. W praktyce bywa używana następująca konstrukcja przybliżona wielokąta foremnego o danym boku a. Niech będzie (rys. 33) $AB = a$. Budujemy trójkąt foremny $\triangle ABA_6$, kreślimy $A_6C \perp AB$ i po obie strony od punktu A_6 odkładamy dowolną ilość razy odcinki, równające się $\frac{1}{6}a$. Końce tych odcinków numerujemy, jak na rysunku. Jeżeli z punktu A_n, jako ze środka, zakreślimy koło promieniem A_nA, wówczas cięciwa AB będzie, mniej więcej, bokiem n-kąta foremnego, wpisanego w to koło. Zbadać dokładność tej konstrukcji w sposób następujący: obliczyć kąty środkowe, odpowiadające bokom wielokątów foremnych o 7, 9, 13, 17 bokach, i porównać je z kątami środkowemi, wspierającemi się na cięciwie AB w zbudowanych przez nas kołach.



Rys. 33.

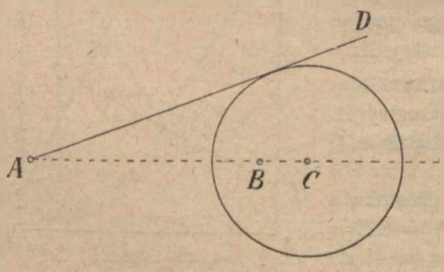
30. Bardzo prosta jest następująca konstrukcja przybliżona siedmiokąta foremnego. Mając dane koło o promieniu r, odkładamy, poczynając od dowolnego punktu A okręgu, cięciwę $AB = r$, poczem kreślimy $BC \perp OA$. Odcinek BC bardzo mało różni się od boku siedmiokąta foremnego, wpisanego w dane koło.

Wykazać, że jeśli $r = 100$ cm., to odcinek BC różni się mniej, niż o 0,2 cm. od boku siedmiokąta wpisanego.

31. Mamy dane koło o promieniu r. Obliczyć kąt α między stycznemi, wychodzącemi z punktu A, jeżeli odległość tego punktu od środka koła równa się d.

Zastosowanie: $r = 16$ cm, $d = 25$ cm.

32. Koło o promieniu 20 cm. obraca się dokoła punktu B, odległego o 10 cm. od jego środka C (rys. 34). Pręt AD obraca się dokoła punktu A i pozostaje zawsze styczny do koła. $AB = 50$ cm. Wykreślić w skali 1 : 5 figury odpowiadające najwyższemu i najniższemu położeniu pręta, i obliczyć w obu przypadkach kąt $\sphericalangle DAB$.



Rys. 34.

33. Niech prosta AB w zadaniu 32 przecina okrąg w punkcie E. Jak wielki jest kąt $\sphericalangle DAB$ w chwili, gdy E znajduje się w najwyższem lub najniższem położeniu względem prostej AB?

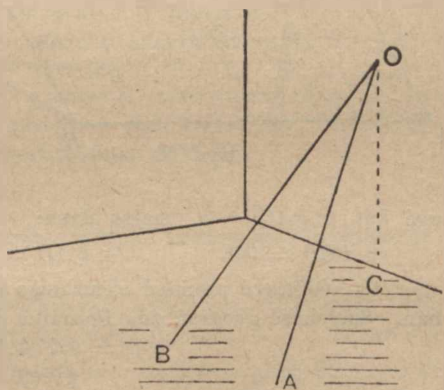
34. Tarcza zegara ustawiona jest pionowo; wskazówki mają 12 cm. i 8 cm. długości. Obliczyć odległości końców wskazówek od prostej poziomej, poprowadzonej przez środek tarczy, jeżeli zegar wskazuje 2 g. 10 m.

35. Z pokoju prowadzą na kurytarz drzwi, których szerokość $= d$. Szerokość kurytarza $= p$. Z pokoju chcemy przesunąć na kurytarz stół, którego szerokość $= b$. Jaka jest największa długość x stołu, przy której można przesunąć go, nie podnosząc i nie przechylając?

36. W oknie na wysokości 11 m. nad ulicą stoi płaskie lustro. Słońce chowa się w tej chwili za przeciwległą kamienicę i ostatnie jego promienie, odbiwszy się od lustra, trafiają w podnóże kamienicy. Obliczyć szerokość x ulicy i wysokość h kamienicy, jeżeli promienie słońca padają pod kątem 25^0 względem poziomu, a lustro tworzy kąt 7^0 z pionem.

37. W jakich granicach zawierać się może błąd popełniony przy obliczeniu wysokości kamienicy (zad. 36), jeżeli mierząc kąt, który lustro tworzy z pionem, mogliśmy omylić się nie więcej, niż o 1^0?

38. Na rys. 35 punkt O oznacza mały otwór w okiennicy, przez który wpada do pokoju promień słońca. Wiedząc, że promień obraca się w ciągu godziny o 15^0 dokoła O i że $AB = 2$ m., $CA = CB = 2{,}5$ m., $OC = 2{,}2$ m., obliczyć: 1) w ciągu jakiego czasu promień przesunie się od OA do OB? 2) jak wielkie są kąty, pod któremi OA i OB są nachylone do podłogi?



Rys. 35.

39. Obliczyć długość półcienia, jaki rzuca słup, mający 3 m. wysokości, w chwili, gdy wysokość środka tarczy słonecznej równa się 37^0. (Tarczę słoneczną widzimy pod kątem $30'$).

40. Pewien mechanizm składa się z prętów AB, CD, obracających się dokoła punktów A i C, przyczem koniec D drugiego pręta ślizga się po pierwszym pręcie. Obliczyć kąt $\sphericalangle BAC = \vartheta$ w zależności od kąta $\sphericalangle DCA = \varphi$, od długości pręta $CD = b$ oraz odcinka $AC = a$.

41. Po jednej stronie rzeki znajdują się dwa punkty obserwacyjne A i B, po drugiej stronie — drzewo D. Zmierzono odcinek $AB = d$ oraz kąty $\sphericalangle DAB = \alpha$, $\sphericalangle DBA = \beta$. Obliczyć szerokość rzeki.

42. Mając dane trzy wymiary prostopadłościanu a, b, c, obliczyć (1) kąt α, pod którym przekątna nachylona jest do podstawy; (2) kąt φ między przekątnemi prostopadłościanu.

43. Chcąc obliczyć pojemność sali, zmierzono długość jej a, szerokość b, kąt α między przekątną ściany bocznej i podłogą; wreszcie kąt β między przekątną ściany przedniej i podłogą.

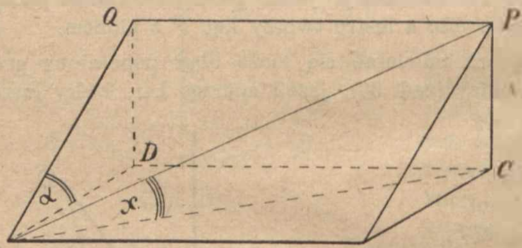
(1) Wykazać, że jeden z tych pomiarów był zbyteczny;

(2) wykonać obliczenie, kładąc $a = 18,4$; $b = 11,8$; $\alpha = 31^0 48'$, $\beta = 44^0 01'$;

(3) sprawdzić rachunek zapomocą tej z pośród powyższych czterech liczb, którą nie posługiwaliśmy się przy obliczaniu pojemności sali.

44. Obliczyć kąt, pod którym nachylona jest do podstawy ściana boczna ostrosłupa prostego o podstawie kwadratowej, jeżeli bok podstawy $a = 40$ cm., wysokość ostrosłupa $h = 65$ cm.

45. W ostrosłupie prostym o podstawie kwadratowej dana jest krawędź boczna a i kąt α między krawędzią boczną a krawędzią podstawy. Obliczyć wysokość ostrosłupa.



Rys. 36.

46. W czworościanie foremnym obliczyć:

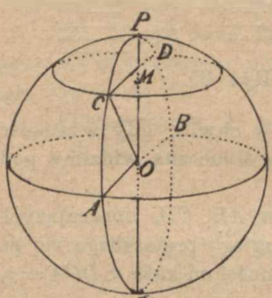
(1) kąt nachylenia krawędzi bocznej do podstawy;

(2) kąt między ścianą boczną a podstawą.

47. W graniastosłupie prostym o podstawie trójkątnej (rys. 36) obliczyć kąt $\sphericalangle PAC = x$, mając dane:

$\sphericalangle PCB = 90^0$, $\sphericalangle QAD = \alpha$, oraz $\sphericalangle DAC = \beta$.

48. Obliczyć promień ziemskiego równoleżnika, na którym leży Poznań. Szerokość geograficzna Poznania $\varphi = 52^0 25'$; promień kuli ziemskiej $R = 6377,4$ klm.



Rys. 37.

[Szerokością geograficzną danego miejsca nazywamy kąt między płaszczyzną równika a promieniem ziemskim, przechodzącym przez to miejsce; np. kąt AOC na rys. 37].

49. Szerokość geograficzna Warszawy $= 52^0 13'$ (z dokł. do 1'). Obliczyć długość drogi, którą mieszkaniec Warszawy przebyłby w ciągu 1 godziny skutkiem obrotu ziemi dokoła własnej osi, gdyby ziemia nie posiadała żadnego innego ruchu.

50. Dwaj obserwatorowie A i B, znajdujący się na równinie i odlegli od siebie o m metrów, dostrzegają balon C i obaj znajdują, że kąt elewacji balonu $= \alpha$; prócz tego pierwszy obserwator widzi odcinek BC pod kątem β. Obliczyć wysokość balonu nad równiną.

Zastosowanie: $m = 3500$ m.; $\alpha = 38^0 15'$; $\beta = 47^0 10'$.

51. Z punktu K, leżącego na prostej PP', widzimy pod tym samym

kątem wzniesienia α wierzchołki A, A' dwóch masztów pionowych $PA = h$ i $P'A' = h'$. Kąty wzniesienia tych samych wierzchołków masztów, zmierzone w punkcie R, równają się odpowiednio β i β'. Dowieść, że jeśli punkty P, P', K, R leżą w jednej płaszczyźnie poziomej i jeżeli $\sphericalangle PRP' = 90^0$, wówczas musi być

$$(h + h')^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha = h^2 \operatorname{ctg}^2 \beta + h'^2 \operatorname{ctg}^2 \beta'.$$

52. Stojąc na równinie, na południe od pewnej wieży, mierzymy jej kąt wzniesienia α. Następnie posuwamy się o 32 m. na zachód i znów mierzymy jej kąt wzniesienia β. Obliczyć wysokość wieży, jeżeli $\operatorname{tg} \alpha = 2{,}5$; $\operatorname{tg} \beta = \frac{5}{8}$.

53. Do naczynia, stojącego na stole i mającego kształt prostopadłościanu, nalano tyle wody, że jeśli, obracając naczynie dokoła krawędzi AB podstawy, nachylimy je tak, iż krawędź BC podstawy tworzyć będzie kąt α z płaszczyzną poziomą, wówczas woda sięgać będzie krawędzi CD podstawy. Do jakiej wysokości nalano wody, jeżeli $BC = a$ cm.?

54. Dane są dwie płaszczyzny α i β, przecinające się według prostej AB. Na płaszczyźnie α dany jest trójkąt $\triangle MNP$, który rzutujemy na płaszczyznę β. Dowieść, że pole rzutu równa się polu rzutowanego trójkąta, pomnożonemu przez kosinus kąta między płaszczyznami α i β.

[Wskazówka: Rozważyć najpierw przypadek szczególny, gdy jeden z boków trójkąta $\triangle MNP$ jest równoległy do AB].

55. Graniastosłup prosty o podstawie sześciokątnej foremnej przecięto płaszczyzną, nachyloną do podstawy pod kątem 32°. Obliczyć pole przekroju, jeżeli bok podstawy graniastosłupa = 6 cm.

Konstrukcyjne rozwiązywanie równań trygonometrycznych.

§ 19. W zadaniach poprzedniego paragrafu mieliśmy nieraz do czynienia z *równaniami trygonometrycznemi*, t. j. z równościami, w których skład wchodziły funkcje trygonometryczne niewiadomego kąta, przyczem równości te sprawdzały się tylko przy pewnej oznaczonej wartości tego kąta [1]). Tę wartość nazywamy rozwiązaniem albo pierwiastkiem równania. Np. równanie trygonometryczne

$$\sin \alpha = \frac{k}{m},$$

w którem $0 < \frac{k}{m} < 1$ potrafimy rozwiązać w przybliżeniu, a czasem dokładnie, zapomocą tablic, przyczem znajdziemy jeden tylko kąt ostry α, czyniący mu zadość.

---

[1]) Później, gdy poznamy funkcje trygonometryczne kątów większych od ostrego, przekonamy się, że każde równanie trygonometryczne — o ile posiada rozwiązania — ma ich nieskończenie wiele.

W praktyce zachodzi nieraz potrzeba rozwiązywania równań trygonometrycznych **konstrukcyjnie**, nie zaś zapomocą tablic.

Zadanie I. *Rozwiązać konstrukcyjnie następujące równanie, zachodzące między kątami ostremi*

$$\sin x = \operatorname{tg} \alpha.$$

Chodzi o zbudowanie kąta ostrego x, którego sinus równałby się tangensowi danego kąta ostrego α. Jest to o tyle tylko możliwe, o ile prawa strona równania jest mniejsza od 1,

czyli o ile $\operatorname{tg} \alpha < 1$,

skąd warunek, że $\alpha < 45^0$.

Załóżmy, że warunek ten jest spełniony, i pomnóżmy obie części równania przez stałą liczbę b, którą uważać będziemy za długość pewnego odcinka.

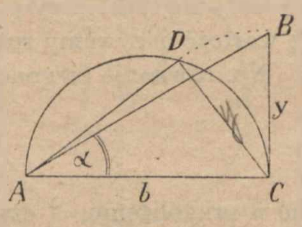
Mamy tedy $b \sin x = b \operatorname{tg} \alpha$.

Oznaczmy każdą z dwóch części równania przez y, czyli zastąpmy dane równanie przez dwa następujące:

$$y = b \sin x \qquad (1)$$

$$y = b \operatorname{tg} \alpha \qquad (2)$$

Z równania (2) widzimy, że y jest przyprostokątną, przeciwległą kątowi α w trójkącie, którego drugą przyprostokątną jest odcinek b. Możemy z łatwością zbudować taki trójkąt, a więc i odcinek y. Na rys. 38 mamy $\sphericalangle CAB = \alpha$, $AC = b$, $BC = y$.



Rys. 38.

Ale z równania (1) wynika, że ten sam odcinek y ma być przyprostokątną, przeciwległą niewiadomemu kątowi x w innym trójkącie, którego przeciwprostokątną jest odcinek b.

W celu więc znalezienia kąta x budujemy półokrąg na średnicy $AC = b$, z C kreślimy łuk promieniem $CB = y$ i otrzymujemy żądany trójkąt prostokątny $\triangle ACD$, w którym

$$\sphericalangle DAC = x.$$

Zadanie II. *Rozwiązać konstrukcyjnie równanie*

$$\cos\varphi = 1 - \frac{a}{b}. \qquad (a > 0,\ b > 0).$$

Chodzi o zbudowanie kąta ostrego φ, czyniącego zadość powyższemu równaniu, przyczem a i b uważamy jako długości pewnych odcinków. Narazie kąt taki potrafimy zbudować tylko wtedy, gdy $a < b$ (dlaczego?)[1]).

Mnożąc obie części równania przez b, mamy

$$b\cos\varphi = b - a,$$

oznaczając zaś każdą część równania przez y, mamy

$$y = b\cos\varphi \qquad (1)$$
$$y = b - a \qquad (2).$$

Ponieważ odcinki b i a są nam dane, zatem na podstawie równania (2) możemy zbudować odcinek y. Po zbudowaniu tego odcinka wystarczy zauważyć, że na mocy równania (1) jest on przyprostokątną przyległą niewiadomemu kątowi φ w trójkącie, którego przeciwprostokątna $= b$.

Uczeń wykona sam konstrukcję.

Ćwiczenia VII. 1. Rozwiązać zapomocą konstrukcji następujące równania trygonometryczne, w których φ jest kątem niewiadomym:

(1) $\cos\varphi = \operatorname{tg}\alpha$; (2) $\sin\varphi = \operatorname{ctg}\alpha$; (3) $\operatorname{tg}\varphi = 1 + \frac{a}{b}$;

(4) $\sin\varphi = \sin\alpha + \cos\alpha$; (5) $\operatorname{tg}\varphi = \sin\alpha + \cos\alpha$.

2. W trójkącie prostokątnym ABC obliczyć jako funkcje przeciwprostokątnej c i kąta ostrego A

(1) wysokość h_c,

(2) rzuty przyprostokątnych na przeciwprostokątną.

3. Z punktu A widzimy pod kątem prostym wysokość h domu, leżącego po drugiej stronie ulicy. W tym samym punkcie kąt wzniesienia szczytu domu $= \alpha$. Obliczyć wysokość h, jeżeli szerokość ulicy $= m$

4. Zbudować kąty ostre α, czyniąc zadość równaniom:

(1) $\sin^2\alpha = \frac{5}{6}$ (2) $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{3}{4}$.

5. (1) W trójkącie równoramiennym ABC, w którym $a = b$, wyrazić podstawę c oraz wysokość h_a jako funkcje boku a i kąta ostrego A.

---

[1]) Gdy poznamy funkcje trygonometryczne kątów dowolnie wiekich, przekonamy się, że można rozwiązać to samo równanie w przypadku ogólniejszym, mianowicie kiedy

$$\left|1 - \frac{a}{b}\right| < 1.$$

(2) Opierając się na znalezionej zależności, rozwiązać konstrukcyjnie równanie

$$7 \sin \alpha \cos \alpha = 5,$$

w którem α oznacza kąt ostry.

6. Opierając się na zadaniu 2, rozwiązać równania:

(1) $\sin \varphi = \sin \alpha \cos \alpha$; (2) $\operatorname{tg} \varphi = \sin \alpha \cos \alpha$;

(3) $\sin^2 \varphi = \frac{a}{b}$; (4) $\sin^2 \varphi = \sin \alpha \cos \alpha$

7. Zbadać geometrycznie, czy jest prawdziwa nierówność

$$\sin \alpha \cos \alpha < \tfrac{1}{2},$$

w której α oznacza kąt ostry.

Czy może być kiedykolwiek

$$\sin \alpha \cos \alpha = \tfrac{1}{2}?$$

Czy może być $\sin \alpha \cos \alpha > \frac{1}{2}$?

8. Zbadać geometrycznie, w jaki sposób zmienia się funkcja

$$y = \sin \alpha \cos \alpha,$$

gdy kąt ostry α rośnie i przybiera wszystkie wartości między 0^0 a 90^0.

9. Rozwiązać równanie

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \frac{1}{2}}.$$

Jak wielki musi być kąt φ, żeby można było zbudować kąt ostry φ? [Wskazówka: czy $\operatorname{tg} \varphi$ może być liczbą ujemną?]

10. Rozwiązać konstrukcyjnie następujące równania i rozwiązania sprawdzić zapomocą tablic, obierając na α jakąkolwiek wartość:

(1) $\operatorname{tg} \varphi = \sin^2 \alpha \cos \alpha$; (2) $\operatorname{ctg} \varphi = \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha$.

11. Zbudować na tej samej figurze odcinki x_1, x_2, x_3, ... czyniące zadość równaniom

$$x_1 = a \sin \alpha, \quad x_2 = a \sin^2 \alpha, \quad x_3 = a \sin^3 \alpha, \; \ldots\ldots$$

12. Zbudować odcinki $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots$, czyniące zadość równaniom

$$x_1 = a \operatorname{tg} \alpha, \quad x_2 = a \operatorname{tg}^2 \alpha \quad x_3 = a \operatorname{tg}^3 \alpha, \; \ldots\ldots$$

12. Rozwiązać konstrukcyjnie i analitycznie następujące dwa równania, w których α oznacza kąt ostry:

$$(1) \quad \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{5}$$

$$(2) \quad \sin \alpha - \cos \alpha = \frac{7}{13}.$$

[Wskazówka: jaki sens może mieć w trójkącie prostokątnym suma $c \sin A + c \cos A$?]

14. Dwoma sposobami zbadać, czy prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} > \operatorname{ctg} \alpha,$$

a mianowicie (1) podstawiając zamiast $\sin \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ ich określenia (2) zapomocą związków, poznanych w zadaniu 2.

15. Zbadać, czy prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} > \operatorname{tg} \alpha.$$

16. Mając daną przeciwprostokątną c i kąt ostry A, obliczyć odcinki u, v, które dwusieczna kąta prostego wyznacza na przeciwprostokątnej. Zbadać, jak zmieniają się te odcinki, gdy kąt A rośnie. Sprawdzić geometrycznie.

17. Mając dane odcinki u, v (zad. 16),

(1) zbudować trójkąt prostokątny;

(2) rozwiązać ten trójkąt.

18. Dane jest koło o promieniu $r = 18$ cm. i w niem średnica AOB Na przedłużeniu średnicy obieramy punkt C i kreślimy styczną CD. Obliczyć długości odcinków CD, OC, jeżeli wiadomo, że $\sphericalangle DAO = \alpha = 25^0$

19. Na zasadzie poprzedniego zadania zbudować kąt α ($\alpha < 45^0$), jeżeli mamy dane

(1) $\operatorname{tg} 2\alpha$; (2) $\cos 2\alpha$; (3) $\frac{1}{\cos 2\alpha}$.

20. Jakiemu warunkowi powinien czynić zadość kąt ostry α, żeby przy wszelkich wartościach rzeczywistych zmiennej x zachodziła nierówność $x^2 + x + \operatorname{tg} \alpha > \frac{3}{4}$?

Związki między funkcjami trygonometrycznemi tego samego kąta ostrego. Tożsamości trygonometryczne.

§ **20**. Widzieliśmy, że mając daną którąkolwiek z czterech funkcyj trygonometrycznych $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, możemy znaleźć kąt ostry α bądź zapomocą tablic, bądź zapomocą konstrukcji. Dowodzi to, że te cztery funkcje nie są od siebie niezależne, że muszą zachodzić między niemi jakieś związki, tak, iż jeśli znamy jedną z nich, wówczas trzy pozostałe funkcje powinny być w zupełności wyznaczone.

Związki te wynikają bezpośrednio z określenia funkcyj trygonometrycznych.

Istotnie, ponieważ

$$\sin \alpha = \frac{y}{d}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{d},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y},$$

zatem rachunek wskazuje, że musi być

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \Big|$$

IV.

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad \Big|$$

Równie łatwo jest ustalić związek między sinusem i kosinusem tego samega kąta. Z rys. 23 na str. 26 mamy

$$x^2 + y^2 = d^2,$$

skąd

$$\left(\frac{x}{d}\right)^2 + \left(\frac{y}{d}\right)^2 = 1$$

czyli

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \qquad \textbf{(V)}.$$

Wzory **IV** i **V** są *tożsamościami trygonometrycznemi*, gdyż pozostają prawdziwe, jakąkolwiek wartość przypiszemy kątowi ostremu α.

§ **21**. Mając daną którąkolwiek funkcję kąta ostrego α, możemy obliczyć trzy pozostałe jego funkcje. Niech będzie dane np. następujące

Zadanie I. *Wiedząc, że* $\sin \alpha = m$, *obliczyć* $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$.

Musimy zacząć od obliczenia kosinusa (dlaczego?). Z tożsamości **V** wynika, że

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$
$$= \pm \sqrt{1 - m^2}$$

Otrzymaliśmy dwie wartości na $\cos \alpha$, ponieważ jednak kosinus kąta ostrego jest zawsze liczbą dodatnią, zatem tylko jedna z tych dwóch odpowiedzi czyni zadość warunkom zadania [1]).

Mamy tedy

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - m^2}$$

Z tożsamości IV wynika, że

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{\sqrt{1 - m^2}}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{1 - m^2}}{m}$$

Zadanie II. *Wiedząc, że* $\operatorname{ctg} \alpha = m$, *obliczyć trzy pozostałe funkcje kąta ostrego* α.

Z tożsamości IV wiemy, że

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$= \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha} \qquad (\textit{tożsamość } \textbf{V})$$

---

[1]) Później, gdy poznamy funkcje kątów dowolnej wielkości, przekonamy się, że wartość ujemna kosinusa ma również sens, nie odpowiada ona jednak kątowi ostremu o który nam w danym wypadku chodzi.

zatem $$\frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = m^2$$

skąd $$\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + m^2}$$

$$\sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

Znów otrzymaliśmy dwie wartości na $\sin \alpha$, z których tylko dodatnia czyni zadość warunkom zadania. Mamy tedy

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}},$$

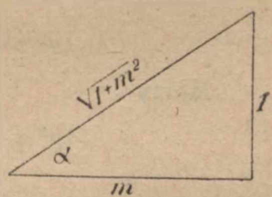
$$\cos \alpha = \frac{m}{\sqrt{1 + m^2}},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{m}.$$

Uwaga. Te same wzory można w następujący sposób otrzymać na drodze geometrycznej. Mamy

$$\operatorname{ctg} \alpha = m$$
$$= \frac{m}{1},$$

kąt więc α jest kątem ostrym trójkąta prostokątnego, którego jedna przyprostokątna $= m$, druga zaś $= 1$ (rys. 39). Na mocy twierdzenia Pitagorasa przeciwprostokątna $= \sqrt{1 + m^2}$. Stosując teraz do naszego trójkąta określenia funkcyj trygonometrycznych, otrzymamy te same wyniki, co poprzednio.



Rys. 39.

§ 22. Związki, zachodzące między funkcjami trygonometrycznemi, stanowią niewyczerpane źródło tożsamości, które sprawdzamy w taki sam sposób, jak tożsamości algebraiczne.

Zadanie I. *Sprawdzić tożsamość*

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1 = \operatorname{ctg}^2 \alpha.$$

Przekształcamy lewą część tożsamości w sposób następujący:

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1 = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

$$= \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \qquad (\textit{tożsam. V})$$

a ponieważ tożsamość IV (str. 42) orzeka, że

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},$$

zatem istotnie

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1 = \operatorname{ctg}^2 \alpha .$$

Zadanie II. *Sprawdzić tożsamość*

$$(\sin \alpha + \cos \alpha) (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) = \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Przekształcając lewą część tożsamości, mamy

$$(\sin \alpha + \cos \alpha) (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) = (\sin \alpha + \cos \alpha) \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\right)$$

$$= (\sin \alpha + \cos \alpha) \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

$$= (\sin \alpha + \cos \alpha) \cdot \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

$$= \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha} .$$

Zadanie III. *Sprawdzić tożsamość*

$$\operatorname{tg}^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \frac{\sin^4 \varphi}{\cos^2 \varphi} .$$

Mamy

$$\operatorname{tg}^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} - \sin^2 \varphi$$

$$= \sin^2 \varphi \left(\frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1\right)$$

$$= \sin^2 \varphi \cdot \frac{1 - \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}$$

$$= \frac{\sin^4 \varphi}{\cos^2 \varphi} .$$

Ćwiczenia VIII. 1. Obliczyć wartości $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, jeżeli $\operatorname{tg} \alpha = m$.

2. Obliczyć $x = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$, jeżeli $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\sin \beta = \frac{5}{13}$.

3. $\cos \alpha = \frac{m}{n}$; obliczyć trzy pozostałe funkcje.

4. Jaka zależność zachodzi między liczbami m i p jeżeli:

(1) $\cos \alpha = m; \quad \operatorname{tg} \alpha = p$

(2) $\frac{1}{\cos \alpha} = m; \quad \operatorname{ctg} \alpha = p$

(3) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = m; \quad \operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha = p^2$

5. Mamy dane, że $y = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$; wyrazić y jako funkcję kosinusa kąta φ i obliczyć wartość tej funkcji, gdy $\varphi = 30^0, 60^0, 45^0$.

6. Mamy dane, że $y = \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha}$; wyrazić y jako funkcję kosinusa kąta α i obliczyć wartość tej funkcji, gdy $\alpha = 10^0, 30^0, 60^0$.

W jaki sposób zmienia się y, gdy kąt ostry α rośnie?

7. Wiemy, że $y = \cos^4 \varphi - \sin^4 \varphi$; wyrazić y jako funkcję sinusa kąta φ. Jak zmienia się y, gdy kąt ostry φ rośnie? Czy y może równać się zeru? Czy może być liczbą ujemną?

8. Jeżeli liczby x i a są dodatnie i jeżeli

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{x}{x+a}}, \quad \operatorname{tg} \beta = \sqrt{\frac{x}{a}}$$

to $\alpha = \beta$.

Sprawdzić następujące tożsamości:

9. $1 + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha}$.

10. $\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$.

11. $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2 = \frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$.

12. $\sin^2 \varphi + \cos^4 \varphi = \cos^2 \varphi + \sin^4 \varphi$.

13. $\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{ctg} \varphi = (\operatorname{tg} \varphi - 1)(\operatorname{ctg} \varphi + 1)$.

14. $\operatorname{ctg} \varphi + \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi} = \frac{1}{\sin \varphi}$.

15. $(1 + \sin \alpha)\left(\frac{1}{\cos \alpha} - \operatorname{tg} \alpha\right) = \cos \alpha$.

16. $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2}{\sin \alpha}$.

17. $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$.

18. $\left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha}\right)(\sin \alpha + \cos \alpha) = 2 + \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$.

19. $\left(\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\cos \alpha}\right)(\sin \alpha + \cos \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha$

20. $\left(\frac{1}{\cos \alpha} - \frac{1}{\sin \alpha}\right)(1 + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) = \frac{\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$.

21. $1 - 2 \sin^2 \beta = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}$.

32. $\left(\frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha\right)\left(\frac{1}{\sin \alpha} - \sin \alpha\right)(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) = 1$.

23. Dowieść że, wartości $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$ czynią zadość równaniu $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$.

24. Dowieść, że $x = a \cos^2 \varphi$, $y = a \sin \varphi \cos \varphi$ czynią zadość równaniu $x^2 + y^2 = ax$.

25. Dowieść, że $x = \frac{a}{\cos \vartheta}$, $y = b \operatorname{tg} \vartheta$ czynią zadość równaniu $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$.

26. Dowieść, że jeżeli $x = r \sin \alpha \cos \beta$, $y = r \sin \alpha \sin \beta$, $z = r \cos \alpha$ wówczas musi być

$$\frac{x^2 + y^2}{z^2} = \operatorname{tg}^2 \alpha \text{ oraz } x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

27. Dowieść, że jeżeli boki trójkąta prostokątnego tworzą postęp arytmetyczny, wówczas sinusy jego kątów ostrych równają się $\frac{3}{5}$ i $\frac{4}{5}$.

Zastosowanie rachunku logarytmicznego do trygonometrji.

§ **23**. We wszystkich naszych rachunkach obchodziliśmy się dotąd bez logarytmów, jeżeli jednak mamy do czynienia z liczbami nieco większemi, wówczas dogodniej jest zastosować rachunek logarytmiczny. To też praktycy, mający ciągle do czynienia z długiemi i często zawiłemi rachunkami trygonometrycznemi, posługują się logarytmami. Dla wygody takich rachmistrzów zostały obliczone specjalne tablice, podające odrazu wartości logarytmów funkcyj trygonometrycznych poszczególnych kątów. Mając pod ręką takie tablice i chcąc np. znaleźć

$$\lg \sin 34^0 20'$$

nie mamy potrzeby szukać najpierw wartości $\sin 34^0 20'$, następnie odnajdywać jej logarytm, lecz znając kąt, odczytujemy odrazu logarytm jego sinusa. I odwrotnie: znając logarytm sinusa lub tangensa, odrazu odczytujemy kąt.

Budowa takich tablic w naszej książeczce jest zupełnie podobna do budowy tych tablic funkcyj trygonometrycznych, któremi dotąd posługiwaliśmy się. Nie będziemy tedy wdawali się w opisywanie tablic, przypomnimy tylko, że ponieważ sinus i kosinus są ułamkami, zatem logarytmy ich są liczbami ujemnemi. W celu uniknięcia ujemnych mantys, tablice podają odrazu dopełnienia tych logarytmów, a więc logarytmy sinusów i kosinusów podane są w tablicach z ujemną cechą i dodatnią mantysą. To samo dotyczy logarytmów tangensów kątów mniejszych od 45^0.

Jeżeli szukamy logarytmu sinusa lub tangensa, odczytujemy stopnie kąta w pierwszej kolumnie po stronie lewej, minuty odczytujemy u góry, a poprawki dodajemy;

jeżeli natomiast mamy do czynienia z logarytmem kosinusa lub kotangensa, wówczas stopnie kąta odczytujemy w pierwszej kolumnie po stronie prawej; minuty odczytujemy u dołu, a poprawki odejmujemy (dlaczego odejmujemy?)

Pamiętając o tych regułach i posługując się tablicą IV., mającą u góry napis ***Lg sin***, znajdujemy, że

$$\lg \sin 34^0 20' = \overline{1},7513.$$

Tak samo, jeżeli $\operatorname{tg} A = \overline{1},8345$,

to $A = 34^0 20'$.

Błąd, jaki mogliśmy popełnić, jest napewno mniejszy od $1'$.

§ **24**. Pokażemy jeszcze na przykładach, jak należy układać rachunki logarytmiczne przy rozwiązywaniu trójkątów prostokątnych.

Zadanie I. *Rozwiązać trójkąt prostokątny, mając dane*

$$b = 25{,}01 \text{ m.}, \quad B = 65^0 10'.$$

DANE: $b = 25{,}01$, $B = 65^0 10'$

ZNALEZIONE: $A = 24^0 50'$, $a = 11{,}57$, $c = 27{,}56$

OBLICZENIE BOKU a.

$$a = b \,.\, \operatorname{ctg} B$$

$$\lg a = \lg b + \lg \operatorname{ctg} B$$

$$\lg 25{,}01 = 1{,}3981$$
$$\lg \operatorname{ctg} 65^0 10' = \overline{1},6654$$
$$\lg a = 1{,}0635$$
$$a = 11{,}57$$

OBLICZENIE BOKU c.

$$c = \frac{b}{\sin B}$$

$$\lg c = \lg b + \operatorname{colg} \sin B$$

$$\lg 25{,}01 = 1{,}3981$$
$$\operatorname{colg} \sin 65^0 10' = 0{,}0421$$
$$\lg c = 1{,}4402$$
$$c = 27{,}56$$

SPRAWDZENIE.

$$b^2 = c^2 - a^2 = (c + a)(c - a)$$

$$2 \lg b = \lg (c + a) + \lg (c - a)$$

$$c + a = 39{,}13 \qquad c - a = 15{,}99$$

$$\lg 39{,}13 = 1{,}5925$$
$$\lg 15{,}99 = 1{,}2038$$
$$2 \lg b = 2{,}7963$$

$$\lg 25{,}01 = 1{,}3981$$
$$2 \lg 25{,}01 = 2{,}7962.$$

Zgodność wyników otrzymanych przy sprawdzeniu możemy uważać za dostateczną. Istotnie, każdy logarytm w tablicach zawiera błąd mniejszy od 0,0001; ponieważ lg 25,01 mnożyliśmy przez 2 i skutkiem tego zwiększyliśmy dwukrotnie zawarty w nim błąd, a z drugiej strony, przy dodawaniu logarytmów lg 39,13 + lg 15,99 błędy w nich zawarte mogły również zsumować się, zatem zrozumiałą jest rzeczą, że obliczając dwoma sposobami lg (b^2), mogliśmy otrzymać wyniki, różniące się od siebie o 0,0001.

Zadanie II. *W trójkącie prostokątnym mamy daną przyprostokątną* a = 34,83 m. *i kąt* B = 48° 35′. *Obliczyć:* 1) *bok* b; 2) *o ile zwiększyć trzeba kąt* B, *żeby, przy stałym boku* a, *bok* b *wzrósł o* 20 m.

1) OBLICZENIE BOKU b.

$$b = a \cdot \operatorname{tg} B, \quad \text{zatem} \quad \lg b = \lg a + \lg \operatorname{tg} B$$

$$\lg 34{,}83 = 1{,}5420$$
$$\lg \operatorname{tg} 48^0\,35' = 0{,}0545$$
$$\lg b = 1{,}5965$$
$$b = 39{,}49.$$

2) OBLICZENIE KĄTA $B + x$.

$$\operatorname{tg}(B + x) = \frac{b + 20}{a}; \ \lg \operatorname{tg}(B + x) = \lg(b + 20) + \operatorname{colg} a.$$

$$\lg 59{,}49 = 1{,}7745$$
$$\operatorname{colg} 34{,}83 = 2{,}4580$$
$$\lg \operatorname{tg}(B + x) = 0{,}2325$$
$$B + x = 59^0\,39'$$
$$x = 11^0\,04'$$

Ćwiczenia IX. 1. Rozwiązać trójkąty prostokątne:

DANE:		SZUKANE:		
$c = 879{,}5$	$B = 31^0\,23'$	$a = 750{,}8$	$b = 457{,}9$	$A = 58^0\,37'$
$c = 51{,}67$	$A = 41^0\,33'$	$a = 34{,}27$	$b = 38{,}66$	$B = 48^0\,27'$
$a = 32{,}17$	$b = 19{,}35$	$A = 58^0\,58'$	$B = 31^0\,02'$	$c = 37{,}54$
$a = 2{,}96$	$b = 3{,}86$	$A = 37^0\,29'$	$B = 52^0\,31'$	$c = 4{,}864$
$b = 852$	$B = 42^0\,48'$	$A = 47^0\,12'$	$a = 920{,}1$	$c = 1254$
$b = 34{,}27$	$B = 41^0\,32'$	$A = 48^0\,28'$	$a = 38{,}69$	$c = 51{,}69$
$c = 301$	$b = 272$	$A = 25^0\,21'$	$B = 64^0\,39'$	$a = 128{,}9$
$c = 91{,}42$	$a = 12{,}19$	$A = 7^0\,40'$	$B = 82^0\,20'$	$b = 90{,}6$

2. Obliczyć pole trójkąta prostokątnego, mając dane $A = 35^\circ 29'$; $c = 387,6$.

3. Obliczyć pole ośmiokąta foremnego, którego bok = 6,45 m.

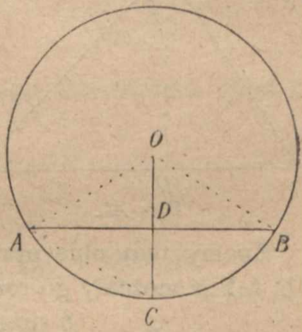
4. Znaleźć promienie dwóch kół, jeżeli mamy dane: odległość ich środków $a = 714$, kąt między spólnemi stycznemi zewnętrznemi $2\alpha = 36^\circ 8$ i kąt między spólnemi stycznemi wewnętrznemi $2\beta = 104^\circ 12'$.

5. W trójkącie ukośnokątnym $\triangle ABC$ mamy dane dwie wysokości h_a i h_b oraz kąt C. Obliczyć boki a i b, kładąc $C = 32^\circ 18'$; $h_a = 19,27$; $h_b = 23,65$.

6. Odcinek CD promienia, przechodzącego przez środek łuku, nazywamy *strzałką*, odpowiadającą kątowi środkowemu $\sphericalangle AOB$. Znaleźć wzór na długość strzałki w zależności od promienia r i od kąta środkowego α (rys. 40).

7. Ułożyć tabelkę strzałek, odpowiadających kątem środkowym 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60° w kole o promieniu $r = 100$ m.

8. Rozwiązać trójkąt prostokątny, mając dane pole jego $S = 205,25$ cm² i bok $a = 25,6$ cm.



Rys. 40.

Rozwiązać romb, mając dane:

9. $e = 2,046$; $A = 85^\circ 05'$. 10. $e = 112,3$; $f = 347$.
11. $e = 40,5$; $\rho = 10,48$. 12. $\rho = 128$; $A = 68^\circ 40'$.
13. $a = 55,44$; $S = 2682$. 14 $\rho = 88$; $S = 6275$.

Rozwiązać trójkąt równoramienny, mając dane:

15. $c = 92,4$; $\rho = 18,2$. 16. $\rho = 62,5$; $B = 72^\circ 14$.
17. $h_c = 28,9$; $\rho = 10,3$. 18 $R = 15,62$; $A = 49^\circ 27'$.

19. W trójkącie ABC mamy dane: $c = 2000$; $A = 33^\circ 18'$; $B = 105^\circ 21'$. Obliczyć pole S trójkąta ABC i długość boku a.

20. W ostrosłup prosty o podstawie kwadratowej wpisano kulę. Znając promień ρ kuli i kąt α, pod którym ściana boczna jest nachylona do podstawy, obliczyć: 1) bok a podstawy; 2) wysokość h ostrosłupa; 3) kąt β, pod którym krawędź boczna jest nachylona do podstawy.

Zastosowanie: $a = 16,6$ cm; $\alpha = 52^\circ 14'$.

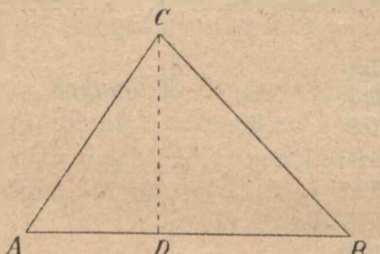
21. W kulę o promieniu R wpisano ostrosłup prosty o podstawie kwadratowej. Mając dany bok a podstawy, obliczyć: 1) wysokość h ostrosłupa; 2) kąt α między ścianą boczną i podstawą; 3) kąt β między krawędzią boczną i podstawą.

Zastosowanie: $R = 128,5$ cm.; $a = 46,7$ cm.

§ **25**. W poprzednich zadaniach rozwiązywaliśmy trójkąty prostokątne oraz obliczaliśmy kąty i odcinki w takich figurach, które dają się odrazu sprowadzić do trójkątów prostokątnych.

Łatwo jest przekonać się, że dotychczasowe nasze wiadomości wystarczyć mogą do rozwiązywania trójkątów dowolnych. Istotnie, każdy trójkąt możemy podzielić zapomocą wysokości na trójkąty prostokątne. Dla przykładu rozwiążemy dwa następujące zadania.

Zadanie I. *Rozwiązać trójkąt* ABC, *mając dane*: c, b, A.



Rys. 41.

Załóżmy najpierw, że kąt A jest ostry (rys. 41). Jeżeli poprowadziliśmy wysokość $CD = h$, wówczas w trójkącie prostokątnym ACD znamy bok $AC = b$ oraz kąt $\sphericalangle CAB = A$. Mam tedy

$$h = b \sin A, \quad AD = b \cos A.$$

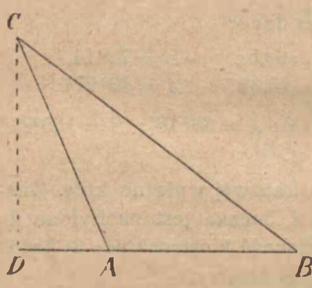
Wynika stąd, że

$$DB = c - b \cos A.$$

Znamy tedy obie przyprostokątne w trójkącie prostokątnym CBD, tak iż możemy go rozwiązać. Jakoż

$$\operatorname{tg} B = \frac{b \sin A}{c - b \cos A}, \quad a = \frac{c - b \cos A}{\cos B}.$$

Rzecz jasna, że moglibyśmy obliczyć długość boku a na mocy twierdzenia Pitagorasa, ale rachunek byłby wówczas dość uciążliwy.



Rys. 42.

Gdyby kąt A był rozwarty, punkt D upadłby na przedłużenie boku c. Z $\triangle$ ACD (rys. 42) mielibyśmy wówczas, oznaczając CD przez h:

$$h = b \,.\, \sin (180^0 - A),$$
$$AD = b \,.\, \cos (180^0 - A).$$

Ponieważ $BD = BA + AD$

$$= c + b \cos (180^0 - A),$$

zatem, rozwiązując trójkąt prostokątny CBD, mamy

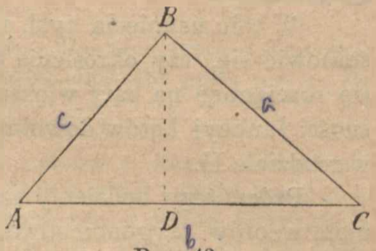
$$\operatorname{tg} B = \frac{h}{BD} = \frac{b \,.\, \sin (180^0 - A)}{c + b \cos (180^0 - A)}.$$

oraz

$$a = \frac{BD}{\cos B} = \frac{c + b \cos (180^0 - A)}{\cos B}.$$

Zadanie II. *Rozwiązać trójkąt, mając dane trzy jego boki* a, b, c.

Załóżmy, że największym kątem trójkąta jest $\sphericalangle B$, i poprowadźmy wysokość BD[1]) (rys. 43).



Rys. 43.

W trójkącie prostokątnym $\triangle ABD$ mamy dany jeden tylko element, mianowicie bok c, chcąc tedy rozwiązać ten trójkąt, musimy wpierw obliczyć jakiś drugi element, np. bok AD. Na mocy znanego twierdzenia geometrycznego (j a k i e g o?) mamy

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \,.\, AD,$$

skąd

$$AD = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}.$$

Teraz już łatwo obliczyć możemy kąt A. Istotnie

$$\cos A = \frac{AD}{AB}$$

$$= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Z tego samego trójkąta wynika, że

$$h = c \,.\, \sin A,$$

zatem możemy już rozwiązać trójkąt prostokątny $\triangle BCD$ (d l a c z e g o?)

Otrzymujemy

$$\sin C = \frac{h}{a}$$

$$= \frac{c \,.\, \sin A}{a}.$$

Trzeci kąt trójkąta obliczymy z równania

$$B = 180^0 - (A + C).$$

§ **26**. Jak widzimy, wiadomości nasze z trygonometrji wystarczyć mogą do rozwiązywania trójkątów ogólnych, ale rachunki są dość kłopotliwe, gdyż

1) musimy rozróżniać w poszczególnych przypadkach kąty ostre i rozwarte, nie mając wzorów ogólnych, które dałyby się zastosować do wszelkich kątów;

---

[1]) Dlaczego wygodniej jest prowadzić wysokość z wierzchołka największego kąta w trójkącie?

2) otrzymujemy wzory, nie nadające się do rachunku logarytmicznego.

W celu usunięcia tych niedogodności musimy najpierw zastanowić się, czy określenia funkcyj trygonometrycznych dadzą się rozciągnąć na kąty większe od prostego i jakie mogą być własności funkcyj kątów dowolnie wielkich. Sprawą tą zajmiemy się w rozdziale II.

Prócz tego będziemy musieli zająć się szerzej przekształcaniem wzorów trygonometrycznych i doprowadzaniem ich do postaci, jakiej wymaga rachunek logarytmiczny.

Ćwiczenia do rozdziału I.

1. Dwa okręgi o promieniach r i r' są zewnętrznie do siebie styczne. Obliczyć kąt 2α między ich wspólnemi stycznemi zewnętrznemi.

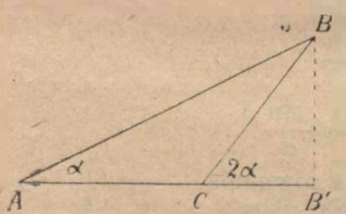
Zbadać, w jaki sposób zmienia się $\sin\alpha$, jeżeli $r + r'$ jest wielkością stałą, natomiast różnica $r - r'$ jest zmienna.

W szczególności obliczyć, jak wielka musi być różnica $r - r'$, jeżeli $r + r' = 1000$, a $2\alpha = 90^0$, 120^0, 160^0.

2. Przez wierzchołki A, B kwadratu poprowadzono okrąg koła, który przecina bok CD (lub jego przedłużenie) pod kątem α. Obliczyć promień koła jako funkcję boku a kwadratu i kąta α. Zbadać otrzymane równanie.

3. W trójkącie prostokątnym $\triangle ABC$ poprowadzono wysokość AD. Obliczyć kąty trójkąta, jeżeli pole $\triangle ADC$ jest średnią geometryczną pól trójkątów $\triangle ABC$ i $\triangle ABD$.

4. Mając dany kąt ostry $\sphericalangle BCB' = 2\alpha$, odkładamy na jednem jego ramieniu dowolny odcinek $CB = a$, na przedłużeniu zaś drugiego ramienia $CA = CB = a$.— Wyrazić dwoma sposobami pole $\triangle ABC$: raz jako funkcję kąta 2α, drugi raz jako funkcję kąta α i w ten sposób znaleźć zależność między $\sin 2\alpha$ a funkcjami trygonometrycznemi kąta α. (rys. 44).



Rys. 44.

Zapomocą tablic sprawdzić ten wzór dla jakiejkolwiek wartości szczególnej kąta 2α. Z wzoru wyczytać, co rośnie prędzej: kąt zmienny α czy jego sinus?

5. Z tej samej figury otrzymać związek między $\cos 2\alpha$ a funkcjami kąta α, wyrażając odcinek CB' raz jako funkcję kąta 2α, drugi raz jako funcję kąta α.

6. Z równań, otrzymanych w dwóch poprzednich zadaniach, wysnuć analogiczne równanie dla $\operatorname{tg} 2\alpha$.

7. Stosunek pól dwóch wielokątów foremnych o n bokach, z których jeden jest opisany na kole, drugi wpisany w to koło, równa się $\frac{4}{3}$. Znaleźć liczbę n.

8. Znaleźć z dokładnością do $10'$ kąt ostry φ, czyniący zadość równaniu

$$\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{ctg}\varphi = 2.$$

9. Oznaczmy trzy krawędzie prostopadłościanu przez a, b, c, kąty zaś między krawędziami a przekątną prostopadłościanu przez α, β, γ. Dowieść, że mamy zawsze

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

10. Mamy dane koło o promieniu r i punkt A, leżący zewnątrz płaszczyzny koła. Rzut A' punktu A na tę płaszczyznę odległy jest o d od środka koła. (1) Zbudować najkrótszy i najdłuższy z pośród odcinków, łączących punkt A z punktami okręgu. (2) Obliczyć kąty międy temi odcinkami a płaszczyzną koła.

11. Wykazać, że różnica między funkcją $3\sin^4\alpha - 2\sin^6\alpha$ a funkcją $2\cos^6\alpha - 3\cos^4\alpha$ jest wielkością stałą (tj. nie zależy od kąta α).

12. Jeżeli $\cos\varphi = \dfrac{\cos\alpha + \cos\beta}{1 + \cos\alpha\cos\beta}$, wówczas musi być.

$$\sin\varphi = \frac{\sin\alpha\sin\beta}{1 + \cos\alpha\cos\beta} \quad \text{oraz} \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}.$$

13. Jeżeli $\operatorname{tg}\vartheta = \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha - \cos\beta}$, wówczas musi być

$$\sin\vartheta = \frac{\sin\alpha\sin\beta}{1 - \cos\alpha\cos\beta} \quad \text{oraz} \quad \cos\vartheta = \frac{\cos\alpha - \cos\beta}{1 - \cos\alpha\cos\beta}.$$

14. Jeżeli $\operatorname{tg}^2\alpha = 1 + 2\operatorname{tg}^2\beta$, wówczas $\cos^2\beta = 2\cos^2\alpha$.

15. Jeżeli mamy $a\cos\varphi + b\sin\varphi = 0$

a zarazem $$a\sin\varphi + b\cos\varphi = c,$$

wówczas $$c^2 = \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2 + b^2}.$$

[Wskazówka: z danych dwóch rownań wyznaczamy $\sin\varphi$, $\cos\varphi$].

16. Jeżeli $x = a\cos\vartheta + b\sin\vartheta = a'\cos\vartheta + b'\sin\vartheta$,

wówczas $$x^2 = \frac{(ab' - a'b)^2}{(a - a')^2 + (b - b')^2}.$$

17. Jeżeli zachodzą trzy równania

$$a' = a\cos^2\varphi + 2k\sin\varphi\cos\varphi + b\sin^2\varphi$$
$$k' = k(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) - (a - b)\sin\varphi\cos\varphi$$
$$b' = a\sin^2\varphi - 2k\sin\varphi\cos\varphi + b\cos^2\varphi$$

wówczas muszą zachodzić dwa następujące równania:

$$a' + b' = a + b$$
$$a'b' - k'^2 = ab - k^2.$$

18. Na płaszczyźnie dana jest nieruchoma półprosta OA i punkt ruchomy M. Niech M' będzie rzutem punktu M na OA. Wprowadźmy następujące oznaczenia: $OM = d$, $OM' = x$, $M'M = y$. Co kreśli punkt M, jeżeli stosunek $\dfrac{x}{d}$ pozostaje stały? jeżeli $\dfrac{y}{d}$ jest stały? jeżeli $\dfrac{x}{y}$ jest stały?

18*a*. Dowieść zapomocą trygonometrji, że miejscem geometrycznem punktów, których odległości od ramion danego kąta są w stałym do siebie stosunku, jest prosta, przechodząca przez wierzchołek kąta.

18b. Dany kąt α podzielić na dwa kąty β i γ tak, by było $\sin\beta : \sin\gamma = m : n$, gdzie m, n są to liczby stałe.

19. Przez środek O danego koła prowadzimy dwie prostopadłe do siebie proste OX, OY. Styczna ruchoma przecina te proste odpowiednio w punktach A i B. Przez A kreślimy równoległą do OY, przez B równoległą do OX. Niech M będzie punktem przecięcia się tych prostych. Jeżeli przez środek koła poprowadzimy półprostą, symetryczną z prostą OX względem prostej OM, i na niej odłożymy $OK = OM$, wówczas miejscem punktu K musi być prosta, równoległa do OX. [Wskazówka: kąt $\sphericalangle BAO$ oznaczamy przez α; prowadzimy promień do punktu styczności; niech K' będzie rzutem K na OX; jak wielki jest kąt $\sphericalangle KOK'$? Uwzględnić wzór z zadania 4, str. 54].

20. Z punktów O i O' promieniem r zakreślono dwa koła, styczne do siebie zewnętrznie w punkcie A. Przez A kreślimy sieczną, która przecina pierwsze koło w punkcie B, drugie—w C. Na BC, jako na średnicy, budujemy trzecie koło, przecinające drugie koło w D. W trójkąt krzywolinjowy, ograniczony przez łuki AB, BD, DA, wpisujemy czwarte koło. Wykazać, że promień ρ tego czwartego koła wyraża się wzorem

$$\rho = \frac{2r\cos^2\alpha}{1+2\cos\alpha},$$

gdzie α jest kątem między BC i OO'.

21. Dowieść zapomocą trygonometrji, że jeśli koło $(O)r$ przechodzi przez środek koła $(O')r$ i jeżeli spólne styczne tych kół dotykają pierwszego koła w punktach A i A', wówczas prosta AA' jest styczna do drugiego koła.

[Wskazówka: $\sphericalangle AOO' = \alpha$; jak wielki jest odcinek OB, gdzie B jest punktem przecięcia się prostych AA' i OO'?]

22 Jeżeli w koło wpiszemy czworokąt i z dowolnego punktu M okręgu poprowadzimy prostopadłe do jego boków, wówczas iloczyn prostopadłych, poprowadzonych do dwóch boków przeciwległych, równać sie musi iloczynowi dwóch drugich prostopadłych.

[Wskazówka: punkt M połączyć z dwoma przeciwległemi wierzchołkami i zbadać, czy nie powstały na figurze kąty równe].

23. Ostrosłup pochyły ma za podstawę trójkąt foremny. Krawędzie boczne tworzą z podstawą kąty α, β, γ takie, że

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{\sqrt{3}}, \quad \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\gamma = \frac{4}{\sqrt{7}}.$$

Dowieść, że wysokość ostrosłupa równa się krawędzi podstawy.

24. Na bilardzie prostokątnym $ABCD$ ($AB = a$, $BC = b$) leżą dwie kule: jedna w środku bilardu, druga — w odległości p od brzegu AB i w odległości q od brzegu BC. Druga kula zostaje uderzona tak, że odbiwszy się pod kątem α od brzegu AB, a następnie odbiwszy się kolejno od brzegów AD, DC, CB, trafia wreszcie w pierwszą kulę. Dowieść, że musi być $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3b+2p}{5a-2q}$.

25. Z punktu A, położonego na wschód od pewnej wieży, widać jej wierzchołek pod kątem wzniesienia 60^0. Posuwając się na południe od A, mierzymy w punktach B i C kąt wzniesienia wierzchołka wieży i znajdujemy, że w punkcie B kąt ten $= 45^0$, w punkcie C zaś $= 30^0$. Wykazać, że

jeśli punkty A, B, C leżą w płaszczyźnie poziomej, przechodzącej przez podnóże wieży, wówczas musi być $AB = BC$.

26. W jakich granicach zmieniać się może parametr a w równaniu

$$\cos\varphi = \frac{a(5-a)}{4}?$$

27. Dowieść zapomocą rozważań geometrycznych, że jeśli A, B są kątami ostremi w trójkącie prostokątnym, przyczem $A > B$, wówczas

$$\sin(A-B) = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}, \quad \cos(A-B) = \frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

28. Kulę o promieniu R przecięto płaszczyzną w odległości d od środka, w przekrój wpisano kwadrat i na nim zbudowano ostrosłup prosty, wpisany w większy odcinek kuli. Pod jakiemi kątami widać bok podstawy i przekątną podstawy z wierzchołka S ostrosłupa?

29. Graniastosłup prosty o podstawie kwadratowej $ABCD$ przecięto płaszczyzną, przechodzącą przez wierzchołek A podstawy. Ślad AX tej płaszczyzny na płaszczyźnie podstawy jest prostopadły do przekątnej AC kwadratu. Bok kwadratu$=a$; objętość bryły, odciętej przez płaszczyznę$=v$. Dowieść, że jeśli przez α oznaczymy kąt między tą płaszczyzną a podstawą graniastosłupa, wówczas musi być

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2v}{a^2\sqrt{2}}.$$

30. Oznaczmy przez S pole wielokąta foremnego wpisanego w koło, przez S' pole podobnego wielokąta opisanego na tem samem kole. Dowieść: 1) zapomocą rachunku trygonometrycznego, 2) zapomocą rozważań czysto geometrycznych, że różnica tych pól $S' - S$ równa się zarówno polu wielokąta podobnego wpisano w koło, którego średnicą jest bok wielokąta S', jak polu wielokąta podobnego, opisanego na kole, mającem za średnicę bok wielokąta S.

31. W czworościanie foremnym $ABCD$ niech K będzie środkiem wysokości AA' czworościanu. Dowieść, że w jednem z naroży czworościanu $KBCD$ wszystkie ściany są kątami prostemi. Obliczyć nachylenie krawędzi KB do płaszczyzny BCD oraz promień kuli, opisanej na czworościanie $KBCD$.

32. Po równi pochyłej, nachylonej pod kątem α do poziomego stołu, stacza się krążek o średnicy d. W pewnej chwili punkt zetknięcia się krążka z równią znajduje się w odległości k od dolnego brzegu równi. Na jakiej wysokości nad stołem znajduje się wówczas środek krążka?

Na jakiej wysokości znajdować się będzie środek krążka, gdy krążek obróci się jeszcze o φ^0?

Obliczyć wartości znalezionych wzorów, kładąc $d=6{,}5$ cm. $k=15$ cm. $\alpha = 36^0$; $\varphi = 20^0$.

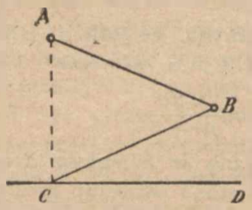
Jaka jest dokładność otrzymanego wyniku, jeżeli długości znamy z dokładnością do 1 mm., kąty zaś z dokład. do $1/2^0$?

33. Lotnik leci na wysokości 2700 m. i, widząc wprost pod sobą szczyt wieży kościelnej, puszcza w ruch chronoskop. Po upływie 12 sek. spostrzega, że kąt depresji wieży $= 80^0$. Z jaką prędkością porusza się samolot? Lecąc dalej po prostej z jednostajną prędkością, lotnik zmierza do nieprzyja-

cielskiej stacji, w którą ma rzucić bombę. Jaki powinien być kąt depresji stacji w chwili, gdy lotnik opuszcza bombę? Nie uwzględniamy oporu powietrza i zakładamy, że wiatru niema.

(Egzamin do niższej szkoły techniczno-wojskowej w Anglji).

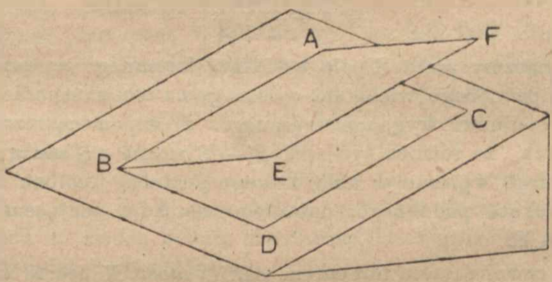
34. Mechanizm (rys. 45) składa się z prętów AB i BC, połączonych zawiasem w B. Koniec A pierwszego pręta obraca się dokoła punktu A, koniec C drugiego pręta ślizga się po prostej CD. Wpewnej chwili prosta AC jest prostopadła do CD. Gdy koniec C przesunął się o a cm., zawias B znalazł się w położeniu B'. Obliczyć długość odcinka BB', wiedząc, że $AB = BC$ i że prostopadła $AC = b$ cm.



Rys. 45.

35. Dana jest półprosta OM i na niej punkt A w odległości 10 cm. od O. Półprosta obraca się dokoła O, a jednocześnie punkt A porusza się po niej w ten sposób, że odcinek OA równa się zawsze pierwotnej swej wartości, pomnożonej przez kosinus kąta, o który obróciła się półprosta. Jaką linję zakreśla punkt A?

36. Kwadratowy arkusz sztywnego papieru $DCFE$ przełamano wzdłuż prostej AB; równoległej do boków CD, EF i dzielącej na połowy



Rys. 46.

dwa drugie boki kwadratu. Dwie połówki arkusza nachylone są do siebie pod kątem φ. Papier ten położono na biurku, którego blat nachylony jest do poziomu pod kątem α (rys. 46). Niech AB leży wzdłuż prostej największego spadku blatu; obliczyć kąt, który prosta AE tworzy z płaszczyzną poziomą, i wykazać, że AE jest pozioma, jeżeli zachodzi równość $\sin \varphi = 2 \operatorname{tg} \alpha$.

(Egzamin wstępny do szkoły wojskowej w Sandhurst).

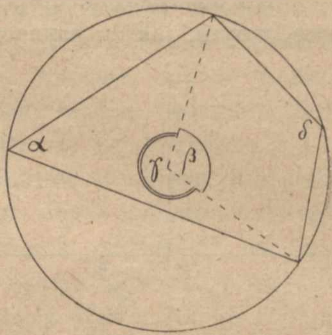
ROZDZIAŁ II.

Funkcje trygonometryczne kątów dowolnych.

Uogólnienie pojęcia kąta.

§ **27**. W geometrji szkolnej mamy przeważnie do czynienia z kątami mniejszemi od 180°. Stosunkowo bardzo rzadko zacho-

dzi w szkole potrzeba rozważania kątów wklęsłych, a więc zawartych w przedziale od 180° do 360°. Jako przykład przytoczyć można twierdzenie elementarne o sumie kątów przeciwległych w czworoboku wpisanym. Twierdzenia tego dowodzi się zazwyczaj w ten sposób, że łączymy środek koła z dwoma wierzchołkami czworoboku (rys. 47), poczem mamy:



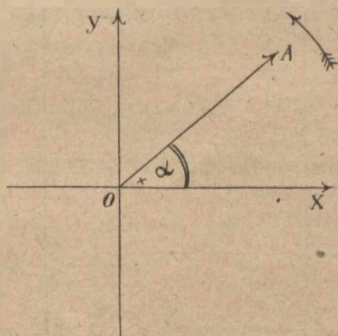
Rys. 47.

$$\sphericalangle \alpha = \tfrac{1}{2} \sphericalangle \beta, \quad \sphericalangle \delta = \tfrac{1}{2} \sphericalangle \gamma,$$

ponieważ jednak z dwóch kątów β i γ jeden jest wklęsły, zatem twierdzenie, na którem opieramy rozumowanie, (mianowicie twierdzenie, że kąt wpisany jest dwa razy mniejszy od środkowego wspartego na tym samym łuku) musiało być poprzednio dowiedzione i dla przypadku, gdy kąt środkowy jest wklęsły.

W wielu badaniach matematycznych, jak również w zastosowaniach matematyki musimy posunąć się o krok dalej i rozważać kąty dowolnej wielkości, a więc zarówno większe od 360°, jak i kąty ujemne.

Niech będzie dany układ współrzędnych prostokątnych i niech półprosta OA obraca się dokoła punktu zerowego O w zwrocie, zaznaczonym strzałką na rys. 48. Jeżeli w swem położeniu początkowem ruchoma półprosta zlewała się z półprostą OX, to, obracając się dokoła O, wykreślić może każdy kąt, którego ramieniem początkowem jest OX. Jeżeli OA wykona obrót zupełny, wykreśli kąt pełny, jeżeli zaś po wykonaniu obrotu zupełnego obróci się jeszcze o 50°, wykreśli kąt, mający



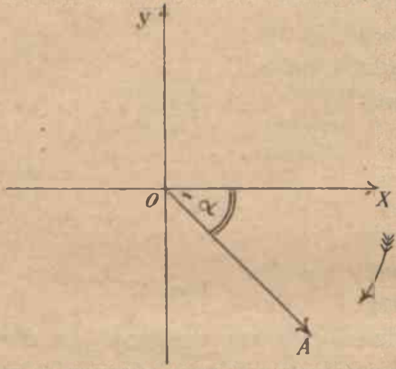
Rys. 48.

$$360° + 50° \text{ czyli } 410°.$$

Gdyby półprosta OA po wykonaniu 2, 3, ... n obrotów zupełnych obróciła się jeszcze o 50°, moglibyśmy powiedzieć, że wykreśliła kąt, mający $2.360° + 50°$ lub $3.360° + 50°$, ... ogólnie: $n.\,360° + 50°$.

Rzecz prosta, że na rysunku nie potrafimy odróżnić kąta α od kąta $\alpha + n . 360^0$.

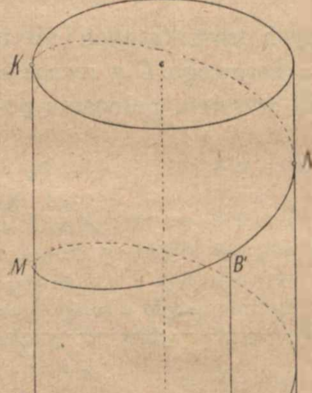
Nie dość na tem. Półprosta OA mogłaby obracać się w zwrocie przeciwnym, jak to zaznaczone zostało strzałką na rys. 49. Chcąc te dwa przypadki rozróżnić, możemy każdy kąt, zakreślony w zwrocie przeciwnym ruchowi wskazówek zegara, uważać za *dodatni*, a w takim razie kąt $\sphericalangle XOA$ na rys. 49 wypadnie uznać za *ujemny*.



Rys. 49.

I znów, przypuszczając, że półprosta OA po wykonaniu obrotu zupełnego nie zatrzymuje się, lecz obraca się dalej, możemy rozważyć kąty ujemne dowolnie wielkie co do wartości bezwzględnej. Jeżeli np. półprosta OA po wykonaniu 6 obrotów zupełnych w zwrocie ujemnym obróciła się jeszcze o 25^0 w tym samym zwrocie, powiemy, że wykreśliła kąt, który ma

$$-(6.360^0 + 25^0) = -2185^0.$$



Rys. 50.

Oczywista rzecz, że pojęcie kąta dowolnie wielkiego (dodatniego czy ujemnego) opiera się na pewnej umowie, która może się nam wydawać zupełnie sztuczną. Umowa ta wtedy tylko nabierze w naszych oczach realnej wartości, jeżeli potrafimy wskazać jakieś zagadnienia, w których jest ona naprawdę użyteczna. Jakoż nietrudno jest znaleźć takie zagadnienia.

Wyobraźmy sobie np., że mamy dany walec i linję śrubową, wykreśloną na jego powierzchni (rys. 50). Niech punkt jakiś porusza się po linji śrubowej i niech A będzie jego położeniem początkowem. Weźmy pod uwagę dowolne położenie B punktu ruchomego i niech C będzie rzutem punktu B na podstawę walca.

Gdy punkt ruchomy kreśli śrubową, promień OC podstawy

obraca się dokoła środka O, przyczem dokona on n razy obrotu zupełnego, jeżeli śrubowa przecina $n+1$ razy tworzącą AK walca. Przypuśćmy teraz, że znamy kąt $\sphericalangle AOC = \alpha$, o który obrócił się promień OC; czy możemy wyznaczyć położenie ruchomego punktu? Jeżeli uwzględniamy tylko kąty nie większe od 360^0, odpowiedź wypadnie przecząca. Istotnie, o ile w punkcie C wystawimy prostopadłą do podstawy walca, będziemy mogli twierdzić, że punkt ruchomy znajduje się na przecięciu się tej prostopadłej z linją śrubową; ale punktów przecięcia się mamy n i nie wiemy, który z nich wybrać. Jeżeli natomiast uwzględniamy kąty większe od 360^0, wówczas odpowiedź na nasze pytanie będzie bardzo łatwa. Niech będzie dane np., że promień OC obrócił się o kąt $\alpha = 470^0$. Ponieważ $470^0 = 360^0 + 110^0$, zatem punkt ruchomy znajduje się niewątpliwie na łuku MN śrubowej. Wystarczy tedy zbudować na podstawie walca kąt $\sphericalangle AOC = 110^0$ i wystawić prostopadłą w punkcie C. Punkt B', w którym prostopadła przecina łuk MN, jest punktem szukanym.

Na tym samym przykładzie możemy wykazać użyteczność pojęcia kątów dodatnich i ujemnych. Wyobraźmy sobie, że na powierzchni walca mamy dane dwie linje śrubowe, nie zaś jedną, a mianowicie tą drugą śrubową niech będzie krzywa, symetryczna z linją $ABMB'NK$ względem płaszczyzny, przesuniętej przez oś walca i przez tworzącą AK[1]). Chcąc teraz wyznaczyć położenie ruchomego punktu, musimy wiedzieć, którą z dwóch śrubowych punkt ten przebiega, t. j. musimy wiedzieć, w jakim zwrocie obraca się promień OC (czy w tym, który odpowiada rysunkowi 50, czy w przeciwnym), a więc musimy wiedzieć, czy mamy budować dodatni kąt $\sphericalangle AOC$, czy też ujemny.

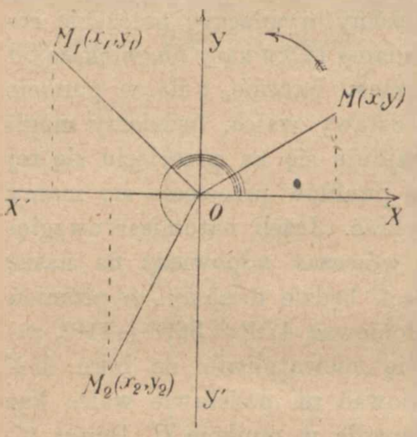
Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta.

§ **28.** W rozdziale I określiliśmy funkcje trygonometryczne kąta ostrego zapomocą wzorów:

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha = \frac{y}{d}, \quad \cos\alpha = \frac{x}{d}. \\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}. \end{aligned}\right| \qquad (I)$$

[1]) Nie chcąc zaciemniać rysunku, nie umieściliśmy drugiej śrubowej na rys. 50. Uczeń może ją sam wykreślić ołówkiem, tak by dwie te linje wyraźnie dawały się odróżnić.

Łatwo jest przekonać się, że określenia te mają sens również dla kątów dowolnej wielkości. Istotnie, jeżeli półprosta ruchoma, obracając się dokoła punktu zerowego, zakreśla kąt, którego ramieniem początkowem jest półprosta OX, wówczas jakiekolwiek byłoby położenie ruchomego ramienia, a więc jakkolwiek wielki kąt został zakreślony, zawsze istnieją i mają sens stosunki, stanowiące prawe części wzorów (I).



Rys 51.

Stosuje się to zarówno do kątów ujemnych, jak dodatnich, zarówno do takich, których wartość bezwzględna jest mniejsza od 360°, jak i do takich, których wartość bezwzględna jest od 360° większa (dlaczego?).

Wobec tego *możemy rozszerzyć pojęcie funkcyj trygonometrycznych na kąty dowolne, uznając wzory* (1) *za* **określenia** *tych czterech funkcyj*.

§ **29**. Przyglądając się rys. 51, możemy odrazu zauważyć, że jeśli rozważamy kąty dowolnej wielkości, wówczas funkcje trygonometryczne przybierać mogą zarówno wartości dodatnie, jak i ujemne.

Gdyby chodziło tylko o funkcje tangens i kotangens, to ustalenie ich znaków nie przedstawiałoby trudności (dlaczego?), jeżeli natomiast chodzi o sinus i kosinus, to musimy wiedzieć, jaki znak przypisujemy mianownikowi d we wzorach (1). W tym celu wprowadzamy:

Umowę. *Odległość punktu na ramieniu ruchomem kąta od punktu zerowego* (którą oznaczyliśmy przez d) *uważać będziemy zawsze za liczbę dodatnią.*

Teraz możemy z łatwością rozwiązać postawione zagadnienie. Istotnie, sinus musi być dodatni w tych ćwiartkach, w których spółrzędna y jest dodatnia (t. j. w I i w II ćwiartce), natomiast ujemny tam, gdzie spółrzędna y jest ujemna (t. j. w III i IV ćwiartce).

Kosinus jest dodatni tam, gdzie spółrzędna x jest dodatnia

(t. j. w I i w IV ćwiartce), ujemny zaś tam, gdzie spółrzędna x jest ujemna (t. j. w II i w III ćwiartcce).

Tangens jest dodatni, jeżeli x i y mają znaki zgodne (t. j. w I i w III ćwiartce), natomiast ujemny tam, gdzie x i y mają znaki przeciwne (t. j. w II i IV ćwiartce).

To samo, rzecz prosta, dotyczy kotangensa.

(Uczeń wykona rysunki, ilustrujące wszystkie te przypadki i uzasadni wypowiedziane twierdzenia).

§ **30**. Nie braliśmy dotąd pod uwagę tych przypadków, gdy ramię ruchome kąta zlewa się z osią spółrzędnych.

Najpierw przypuśćmy, że mamy dany jakikolwiek kąt ostry $\sphericalangle XOM = \alpha$ i że ramię OM, obracając się dokoła punktu O, zbliża się wciąż do ramienia OX [1]. Kąt α stale maleje, a wraz z nim maleje rzędna y punktu M, że zaś odcinek $OM = d$ pozostaje stały, zatem $\sin \alpha$ stale maleje. Widocznem jest, że $\sin \alpha$ może stać się dowolnie małą liczbą dodatnią, jeżeli odpowiednio zmniejszymy kąt α, innemi słowami: że „$\sin \alpha$ dąży do zera, gdy kąt α dąży do zera“. [Porów. ćwiczenia V, 2, 3 na str. 30], co wyrażamy symbolem

$$\sin \alpha \underset{\alpha \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

W chwili, gdy ramię OM upadło na półprostą OX, kąt $\sphericalangle XOM$ przestał istnieć, często jednak bywa rzeczą dogodną mówić, że kąt $\sphericalangle XOM$ ma w tym wypadku 0^0. Sinusowi tego kąta przypisujemy wartość 0, t. j. tę wartość, do której dąży sinus, gdy kąt maleje nieograniczenie. Piszemy tedy

$$\sin 0^0 = 0.$$

W analogiczny sposób możemy ustalić wartość $\cos 0^0$. Wiemy, że $\cos \alpha = \frac{x}{d}$; gdy kąt maleje nieograniczenie, odcięta x stale rośnie, dążąc do wartości d. Co się tyczy funkcji $\cos \alpha$, to dąży ona do 1, co wyrażamy symbolem

$$\cos \alpha \underset{\alpha \to 0}{\longrightarrow} 1.$$

Istotnie, jakkolwiek małą obierzemy liczbę dodatnią ε, możemy zawsze tak dobrać odciętą x punktu M (a więc zbudować taki kąt $\alpha_1 = \sphericalangle XOM$), żeby było

$$1 - \frac{x}{d} < \varepsilon.$$

[1]) Uczeń wykona sam odpowiedni rysunek.

W tym celu wystarczy obrać x tak, żeby było

$$x > d\,(1 - \varepsilon).$$

Przy dalszem zmniejszaniu kąta odcięta x stale rośnie (patrz str. 28), zatem nierówność nasza pozostaje prawdziwa dla wszystkich kątów mniejszych od α_1. Tak więc 1 jest istotnie granicą funkcji $\cos\alpha$, gdy $\alpha \longrightarrow 0^0$.

Tę wartość graniczną (czyli 1) możemy przypisać kosinusowi kąta, mającego 0^0. Piszemy tedy

$$\cos 0^0 = 1.$$

Ponieważ z wzorów (I) wynika, że

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

zatem, jeżeli wzór tem ma pozostać prawdziwym i dla kąta zerowego, musimy mieć

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 0^0 &= \frac{\cos 0^0}{\sin 0^0} \\ &= \frac{0}{1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Inaczej przedstawia się sprawa z funkcją $\operatorname{ctg}\alpha$. Jak wiadomo,

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Jeżeli przypuścimy, że kąt ostry α dąży do zera (co wyrażamy symbolem $\alpha \longrightarrow 0$), wówczas $\operatorname{tg}\alpha \longrightarrow 0$, a więc $\operatorname{ctg}\alpha$ musi rosnąć nieograniczenie, przybierając wartości dodatnie.

Wyrażamy to symbolem

$$\operatorname{ctg}\alpha \underset{\alpha \longrightarrow 0,}{\longrightarrow} +\infty$$

który czytamy tak: „kotangens kąta α jest dodatni i rośnie nieograniczenie, gdy kąt ostry α dąży do zera", albo też: „kotangens dąży do nieskończoności przez wartości dodatnie, gdy kąt ostry α dąży do zera".

W chwili, gdy ruchome ramię OM pada na OX, mamy

$$\alpha = 0^0, \ \operatorname{tg}\alpha = 0,$$

natomiast funkcja $\operatorname{ctg}\alpha$ przestaje istnieć, gdyż nie istnieje liczba

$$\frac{1}{0}.$$

Streszczając wyniki, do których doszliśmy, powiemy:

gdy $\alpha \longrightarrow 0$,

wówczas $\sin\alpha \longrightarrow 0$, $\cos\alpha \longrightarrow 1$, $\operatorname{tg}\alpha \longrightarrow 0$, $\operatorname{ctg}\alpha \longrightarrow +\infty$;

gdy $\alpha = 0$,

wówczas $\sin 0^0 = 0$, $\cos 0^0 = 1$, $\operatorname{tg} 0^0 = 0$,
natomiast $\operatorname{ctg} 0^0$ *nie istnieje*.

§ **31**. Przypuśćmy teraz, że obracamy ramię OM w zwrocie przeciwnym ruchowi wskazówek zegara, tak iż kąt ostry α stale rośnie, dążąc do 90^0.

Wiemy, że wówczas

$$\sin \alpha \rightarrow 1,\ \cos \alpha \rightarrow 0,\ \operatorname{ctg} \alpha \rightarrow 0,\ \operatorname{tg} \alpha \rightarrow +\infty.$$

W chwili gdy ramię OM pada na półprostą OY, kąt $\alpha = 90^0$, odcięta x punktu M staje się równą zeru, rzędna y tegoż punktu równa się d, a więc

$$\sin 90^0 = \frac{d}{d} = 1$$

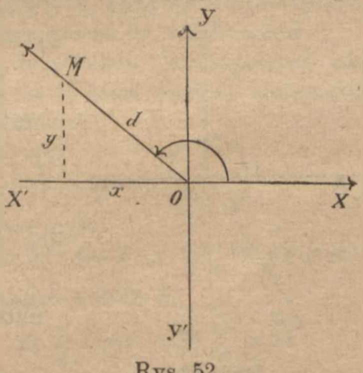
$$\cos 90^0 = \frac{0}{d} = 0$$

$$\operatorname{ctg} 90^0 = \frac{0}{d} = 0,$$

natomiast funkcja $\operatorname{tg} \alpha$ przestaje istnieć, gdyż nie istnieje liczba

$$\frac{d}{0}.$$

§ **32**. Jeżeli ramię OM obracać będziemy dalej w tym samym zwrocie, tak iż powstanie kąt rozwarty $\sphericalangle XOM = \alpha$ (rys. 52), wówczas $\sin \alpha$ pozostanie liczbą dodatnią, natomiast $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ muszą być liczbami ujemnemi.



Rys. 52.

Gdy ramię OM zbliża się nieograniczenie do półprostej OX', sinus maleje nieograniczenie (dlaczego?), natomiast wartość bezwzględna kosinusa rośnie, pozostając jednak mniejsza od 1 (dlaczego?). W chwili, gdy OM pada na OX', mamy $\alpha = 180^0$. Spółrzędna x punktu M przybiera wartość $-d$, spółrzędna y staje się równą zeru. Zatem

$$\sin 180^0 = \frac{0}{d} = 0,$$

$$\cos 180^0 = \frac{-d}{d} = -1.$$

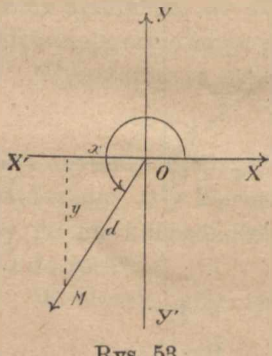
Ponieważ
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$
zatem *wartość bezwzględna* $\operatorname{tg} \alpha$ maleje nieograniczenie, gdy $\alpha \longrightarrow 180^0$. Przy $\alpha = 180^0$ mamy
$$\operatorname{tg} 180^0 = 0.$$

Co się tyczy kotangensa, to mamy zawsze
$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha},$$
zatem *wartość bezwzględna kotangensa* rośnie nieograniczenie, gdy kąt rozwarty α rośnie i dąży do 180^0.

Przy $\alpha = 180^0$ mamy $\operatorname{tg} 180^0 = 0$, a więc na $\operatorname{ctg} 180^0$ otrzymujemy znów wyrażenie pozbawione sensu
$$\frac{1}{0}.$$

Wobec tego powiadamy, że $\operatorname{ctg} 180^0$ nie istnieje, natomiast możemy twierdzić, że
$$\operatorname{ctg} \alpha \underset{\alpha \longrightarrow 180^0}{\longrightarrow} -\infty,$$
co czytamy: „kotangens kąta α dąży do nieskończoności przez wartości ujemne, gdy kąt α dąży do 180^0" [1]).

§ **33**. Uczeń sprawdzi sam, obracając dalej ramię OM w tym samym zwrocie (rys. 53), że



Rys. 53.

1) $\sin 270^0 = -1$, $\cos 270^0 = 0$,
$\operatorname{ctg} 270^0 = 0$, $\operatorname{tg} 270^0$ nie istnieje,

natomiast
$$\operatorname{tg} \alpha \underset{\alpha \longrightarrow 270^0}{\longrightarrow} +\infty,$$

2) $\sin 360^0 = 0$, $\cos 360^0 = 1$,
$\operatorname{tg} 360^0 = 0$, $\operatorname{ctg} 360^0$ nie istnieje,

natomiast
$$\operatorname{ctg} \alpha \underset{\alpha \longrightarrow 360^0}{\longrightarrow} -\infty.$$

---

[1]) Gdybyśmy postąpili wręcz przeciwnie i zaczeli z m n i e j s z a ć k ą t r o z w a r t y α, wówczas *wartość bezwzględna tangensa* stale rosłaby, przyczem $\operatorname{tg} \alpha$ pozostawałby liczbą ujemną. Uczeń sprawdzi sam, że $\operatorname{tg} \alpha$ dąży do nieskończoności przez wartości ujemne, gdy kąt rozwarty α, malejąc, dąży do 90^0, natomiast $\operatorname{ctg} \alpha$ dąży w tym wypadku przez wartości ujemne do zera.

Ćwiczenia X. 1. Jak wielki kąt zakreśliły wskazówki zegara pomiędzy godziną $6^h\,20^m$ a godz. $14^h\,15^m$ tego samego dnia? pomiędzy 5^h a $17^h\,30^m$ następnego dnia? pomiędzy $4^h\,10^m$ jednego dnia a $8^h\,35^m$ jakiegokolwiek innego dnia?

2. Zbudować wszystkie kąty $\sphericalangle XOM = \alpha$ (i przewidzieć z góry, w której ćwiartce leży drugie ramię każdego z tych kątów), czyniące zadość jednemu z następujących warunków:

a) $\sin\alpha = \frac{3}{4}$; b) $\sin\alpha = \frac{5}{6}$; c) $\cos\alpha = \frac{1}{4}$;

d) $\cos\alpha = -\frac{1}{5}$; e) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2}{3}$; f) $\operatorname{ctg}\alpha = 7$.

3. W której ćwiartce znajduje się drugie ramię kąta $\sphericalangle XOM = \alpha$ jeżeli wiemy, że

a) $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ są liczbami ujemnemi,
b) $\sin\alpha$ i $\operatorname{tg}\alpha$ „ „ „
c) $\sin\alpha$ i $\operatorname{ctg}\alpha$ „ „ dodatniemi,
d) $\operatorname{tg}\alpha$ i $\operatorname{ctg}\alpha$ „ „ „
e) $\cos\alpha$ i $\operatorname{ctg}\alpha$ „ „ ujemnemi,
f) $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$.

4. Na odcinku $AB = 12$ cm., jako na średnicy, zakreślamy półkole, poczem wykreślamy dwa promienie OC, OC', których końce C i C' odległe są od średnicy AB o 5 cm. Obliczyć kąty $\sphericalangle AOC$, $\sphericalangle AOC'$ z dokładnością do $1'$.

5. W poprzedniem zadaniu obliczyć kosinusy, tangensy i kotangensy obu kątów $\sphericalangle AOC$ i $\sphericalangle AOC'$.

6. Podać różne wartości kąta φ, czyniące zadość następującym równaniom:

a) $\sin\varphi = 0{,}4258$, b) $\cos\varphi = 0{,}8245$,

c) $\operatorname{tg}\varphi = 3{,}2425$, d) $\operatorname{tg}\varphi = -1{,}6270$.

7. Jak wielki musi być kąt rozwarty α, żeby było $\cos\alpha > -0{,}8$? Czy istnieją kąty większe od 180° czyniąc zadość tej nierówności?

8. Rozwiązać zarówno zapomocą konstrukcji, jak zapomocą tablic następujące nierówności (uwzględniając, że tę samą wartość sinusa posiadają kąty, leżące w dwóch różnych ćwiartkach):

$$\text{a) } 0{,}5 < \sin\alpha < 0{,}75$$
$$\text{b) } -0{,}3 > \sin\alpha > -0{,}5.$$

9. Jak wielki musi być kąt α, żeby było

$\sin 2\alpha > 0$? $\sin 2\alpha < 0$? $\cos 2\alpha > 0$? $\cos 2\alpha < 0$? $\operatorname{tg} 2\alpha > 0$?

10. Jak wielki może być kąt φ, jeżeli wiemy, że

$\sin\frac{\varphi}{3} > 0$? $\sin\frac{\varphi}{3} < 0$? $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{3} < 0$? $\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{3} > 0$?

11. Mamy dany kąt ostry α. W jakich granicach zawierać się musi kąt β, żeby była spełniona nierówność

$$\sin\beta > \sin\alpha\,?$$

12. Jak wielki musi być kąt r o z w a r t y α, żeby funkcja $\sin\alpha$ różniła się od zera mniej niż o 0,1? mniej niż o 0,01? mniej niż o 0,001? mniej niż o 0,0001?

12a. Jak zbudować kąt α tak, żeby $\cos\alpha$ różnił się od 1 mniej, niż o 0,0001

Jak zbudować kąt β tak, żeby $\cos\beta$ różnił się od -1 mniej, niż o 0,00001?

13. Jak wielki jest kąt α, który spełnia nierówność $\operatorname{tg}\alpha > 1$? $\operatorname{tg}\alpha > 2$? $\operatorname{tg}\alpha > 3$? Czy kąt ten może nie być ostry?

W jaki sposób wyznaczyć można wszystkie kąty α, czyniące zadość nierównościom $\operatorname{tg}\alpha > 10$? $\operatorname{tg}\alpha > 100$? $\operatorname{ctg}\alpha > 10000$?

14. W jaki sposób zmienia się funkcja $\sin(180^0 - \alpha)$, gdy α rośnie od 0^0 do 90^0? od 90^0 do 180^0?

15. Przeciwprostokątna $c = 24$ cm., kąt $B = 72^0$. Obliczyć długość odcinka przeciwprostokątnej, zawartego między spodkami wysokości i środkowej.

W jaki sposób zmienia się długość tego odcinka, jeżeli kąt B jest zmienny i rośnie od 0^0 do 90^0? W szczególności, czy odcinek ten osiąga kiedykolwiek wartość największą? najmniejszą?

16. W trójkącie prostokątnym dane są bok a i kąt ostry B. Wyrazić promień ρ koła wpisanego w zależności od a i od $\frac{B}{2}$. Zakładając, że bok a jest stały, kąt B zaś zmienny, zbadać: 1) jak zmienia się ρ, gdy B rośnie? 2) jak przesuwa się przytem punkt styczności M? 3) czy ρ dąży do jakiejkolwiek granicy, gdy $B \to 90^0$?

Obliczyć ρ dla wartości $B = 88^0$, 89^0, $89^0 20'$, $89^0 30'$.

17. W poprzedniem zadaniu obliczyć kąt B, gdy ρ różni się od swej granicy o $\frac{a}{10}$, o $\frac{a}{50}$, o $\frac{a}{100}$.

Z jaką dokładnością obliczyć można B zapomocą tablic czterocyfrowych?

18. W trójkącie prostokątnym wyrazić promień ρ_a koła zawpisanego w zależności od boku a i kąta ostrego B. Zakładając, że bok a jest stały, kąt B zmienny, zbadać: 1) jak zmienia się ρ_a, gdy $B \to 0^0$? 2) gdy $B \to 90^0$? 3) jak wielki musi być kąt B, żeby było $\rho_a = 0{,}9\,a$? $\rho_a = 0{,}99\,a$? 4) jak przesuwa się punkt styczności N, gdy $B \to 0^0$ lub $B \to 90^0$?

19. Przy tych samych danych, co w zadaniu poprzedniem, zbadać zmienność promienia ρ_c koła zawpisanego.

20. W trójkącie równoramiennym ABC wyrazić wysokość, poprowadzoną z wierzchołka A, w zależności od kąta A i podstawy c. Jak zmienia się ta wysokość, gdy podstawa c pozostaje stała, kąt zaś A rośnie? Czy dąży ona do granicy, gdy $A \to 90^0$? Jak wielka musiałaby być wysokość, poprowadzona z C, aby wysokość, poprowadzona z A, różniła się od swej granicy mniej, niż o $0{,}01\,c$? mniej niż o $0{,}001\,c$?

Zastosowanie do równania linji prostej.

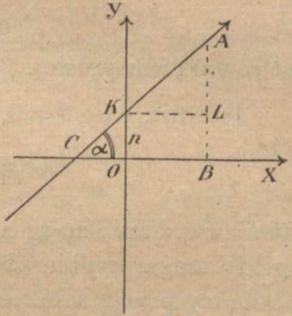
§ **34**. W elementarnym kursie algebry poznaliśmy doświadczalnie fakt, że linja prosta jest obrazem funkcji pierwszego stopnia (którą nawet z tego powodu nazywają często *funkcją linjową*). Oczywista rzecz, że doświadczalne poznanie faktu matematycznego nie wystarcza, nie możemy bowiem mieć pewności, czy nie istnieją wyjątki, które mogły ujść naszej uwagi. Obecnie, gdy poznaliśmy funkcje trygonometryczne dowolnych kątów, możemy

spróbować dowieść tego, co na podstawie doświadczenia można było uważać tylko za rzecz prawdopodobną.

Przedewszystkiem zastanówmy się, co znaczy powiedzenie: linja prosta jest obrazem funkcji pierwszego stopnia? W zdaniu tem zawierają się dwa twierdzenia (których prawdziwość wypadnie zbadać):

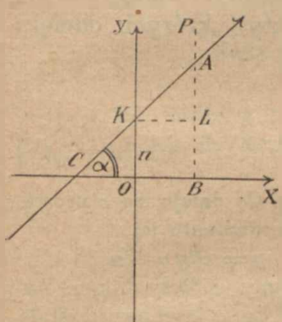
1) *jeżeli mamy daną linję prostą, wówczas spółrzędne każdego jej punktu czynią zadość pewnej funkcji stopnia pierwszego z dwiema zmiennemi*, (albo inaczej: *czynią zadość temu samemu równaniu stopnia pierwszego)*;

2) *spółrzędne żadnego innego punktu płaszczyzny nie czynią zadość tej funkcji (*lub: *temu równaniu)* [1]).



Rys. 54.

I. Niech będzie dana jakakolwiek prosta, przecinająca oś x ów w punkcie C i nachylona do tej osi pod kątem α [2]) (rys. 54). Niech będzie $OK = n$. Obieramy na prostej dowolny punkt A, którego spółrzędne oznaczymy przez x i y.



Rys. 55.

Widzimy przedewszystkiem, że

$$y = AL + n;$$

z $\triangle$ AKL mamy

$$AL = x \operatorname{tg} \alpha,$$

zatem $$y = x \operatorname{tg} \alpha + n. \quad (1).$$

II. Jeżeli obierzemy dowolny punkt P płaszczyzny, nie leżący na naszej prostej, i jeżeli spółrzędne jego oznaczymy przez x' i y', wówczas będziemy mieli (rys. 55).

$$y' \gtrless n + x' \operatorname{tg} \alpha,$$

[1]) Jak widzimy, mamy dowieść dwóch twierdzeń: prostego i przeciwnego. Wiadomo, że badanie twierdzenia przeciwnego zastąpić można przez badanie twierdzenia odwrotnego. Uczeń może spróbować to uczynić.

Każdemu, kto jest obeznany z pojęciem miejsca geometrycznego, nasunąć się musi spostrzeżenie, że powiedzenie, które zamierzamy zbadać, jest równoznaczne z powiedzeniem: *linja prosta jest miejscem geometrycznem punktów płaszczyzny, których spółrzędne czynią zadość funkcji stopnia pierwszego z 2 zmiennemi* (dlaczego?).

[2]) Kątem między dwiema prostemi nazywamy kąt między dodatniemi zwrotami tych prostych.

zależnie od tego, czy P leży nad prostą CA czy pod nią; albo ściślej mówiąc: zależnie od tego, czy punkt P i punkt zerowy O leżą po różnych stronach prostej CA, czy po jednej stronie.

§ **35**. Teraz, gdy oba nasze twierdzenia zostały dowiedzione, łatwo jest wykazać, że ogólne równanie stopnia pierwszego

$$ax + by + c = 0 \tag{2}$$

jest równaniem prostej.

Istotnie, o ile $b \neq 0$, możemy je zawsze przedstawić w postaci

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b},$$

a ponieważ zarówno tg α, jak n w równaniu (1) poprzedniego paragrafu mogą przybierać wszelkie wartości dodatnie i ujemne, zatem mamy prawo założyć, iż

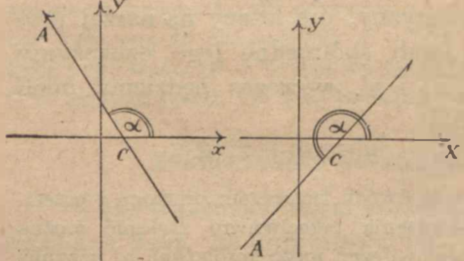
$$-\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha; \quad -\frac{c}{b} = n.$$

Jeżeli $b = 0$, równanie (2) przybiera postać

$$ax + c = 0;$$

jest to równanie prostej równoległej do osi rzędnych, gdyż czynią mu zadość wszystkie punkty (i tylko te punkty), których odcięta równa się $-\frac{c}{a}$.

Ćwiczenia XI. 1. Wykazać, że równania prostych CA i $C'A'$ na rys. 56 mają kształt $y = x$ tg $\alpha + n$.



Rys. 56.

2. Co dzieje się z prostą, jeżeli w równaniu jej

$$y = x \operatorname{tg}\alpha + n$$

zmieniamy spółczynnik n, natomiast tg α zachowuje stałą wartość? jeżeli zmieniamy tg α lecz n pozostaje stałe? [1])

3. Napisać równanie wszystkich prostych (t. j. pęku prostych), nachylonych do osi x-ów pod kątem 115^0. Napisać równanie tej prostej pęku, która przechodzi przez punkt (3; 5).

---

[1]) Układy prostych, które w ten sposób otrzymujemy, nazywamy *pękami prostych*. Spólny punkt wszystkich prostych jednego pęku nazywa się *wierzchołkiem pęku*.

4. Obliczyć z dokładnością do 1′ kąt między osią x-ów i prostą $14y+9x-3=0$.

5. Napisać równanie pęku prostych, przechodzących przez punkt (0; — 4). Napisać równanie tej prostej pęku, która tworzy z osią x-ów kąt $106^0\,12'$.

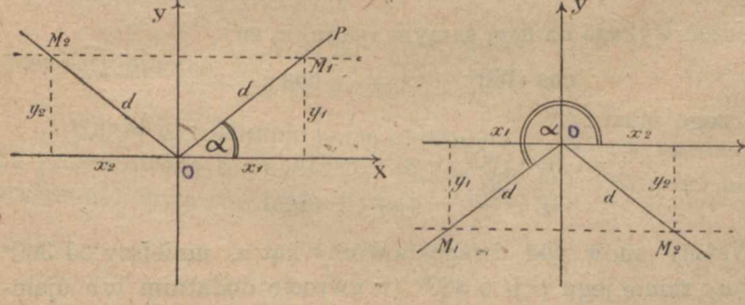
6. W jakim punkcie znajduje się wierzchołek pęku prostych $2y-ax+3=0$? Wykreślić tę część pęku, którą otrzymamy, jeżeli spółczynnikowi a nadawać będziemy wszelkie wartości od 1 do 6.

7. Napisać równanie pęku prostych, przechodzących przez punkt (— 2; — 7). Jak wielki kąt z osią x-ów tworzy ta prosta pęku, która przechodzi prócz tego przez punkt (6; 1)?

§ **36**. Przy rozwiązywaniu zadań poprzednich paragrafów przekonaliśmy się, że różne kąty (mniejsze od 360^0) mogą mieć ten sam sinus, ten sam kosinus ~~lub~~ ten sam tangens. Spostrzeżenie to może mieć praktyczne zastosowanie, jeżeli uda się nam wykryć proste, łatwe do spamiętania zależności między kątami, posiadającemi te same funkcje trygonometryczne. Istotnie, gdyby tak było, nie potrzebowalibyśmy układać tablic trygonometrycznych dla wszystkich kątów od 0^0 do 360^0, lecz poprzestalibyśmy na znacznie krótszych tablicach. Tak więc najbliższem naszem zadaniem będzie ustalenie, które kąty mają te same funkcje trygonometryczne.

Kąty posiadające ten sam sinus.

§ **37**. Weźmy pod uwagę półprostą OP, obracającą się dokoła punktu O, i na niej punkt M w stałej odległości



Rys. 57.

$OM=d$ od punktu zerowego O. Jeżeli prosta OP zakreśli kąt pełny, punkt M zakreśli okrąg koła. Różne położenia punktu M oznaczać będziemy wskaźnikami, tak iż M_1, M_2, M_3, . . . uważać bę-

dziemy za różne położenia tego samego punktu M, kreślącego okrąg koła. Spółrzędne tych punktów oznaczymy odpowiednio przez $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, ...

Wiadomo, że sinus każdego kąta równa się $\frac{y}{d}$, ponieważ zaś założyliśmy, że liczba d pozostaje stałą, zatem w badaniu naszem sinus zależeć będzie tylko od rzędnej y ruchomego punktu M.

Weźmy pod uwagę jakiekolwiek oznaczone położenie półprostej OP, przy którem tworzy ona z osią x-ów kąt

$$\sphericalangle XOM_1 = \alpha.$$

Chcąc znaleźć wszystkie kąty, których sinusy równają się $\sin \alpha$, wystarczy znaleźć na okręgu koła, zakreślonego z O promieniem $OM = d$, wszystkie punkty, mające tę samą rzędną, co punkt M_1. Widzimy (rys. 57), że bez względu na wielkość kąta α istnieje jeden tylko taki punkt M_2 na okręgu, dla którego mamy

$$y_2 = y_1,$$

zatem

$$\sin (XOM_2) = \sin (XOM_1).$$

Łatwo jest przekonać się na rysunku, że zawsze

$$\sphericalangle XOM_2 = 180^0 - \sphericalangle XOM_1,$$

a więc mamy związek szukany

$$\mathbf{\sin (180^0 - \alpha) = \sin \alpha},$$

bez względu na wielkość kąta α, a nawet bez względu na to, czy α jest kątem dodatnim czy ujemnym.

Uczeń wykaże na tym samym rysunku, że

$$\mathbf{\cos (180^0 - \alpha) = - \cos \alpha},$$

wobec czego musi być

$$\operatorname{tg} (180^0 - \alpha) = - \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg} (180^0 - \alpha) = - \operatorname{ctg} \alpha.$$

Weźmy znów pod uwagę dowolny kąt α, mniejszy od 360^0 i obróćmy ramię jego OM o 360^0 (w zwrocie dodatnim lub ujemnym). Rzecz prosta, że OM powróci do tego samego położenia, zatem spółrzędne x, y punktu M nie ulegną zmianie, jeżeli kąt α zwiększymy

$$o\ 360^0,\ 2.360^0,\ 3.360^0 \ldots$$

Mamy tedy

$$\sin \alpha = \sin (\alpha + 360^0 . n),$$

gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą (dodatnią czy ujemną) lub też zerem. Widzimy stąd, że

$$\sin\alpha = \sin(180^0 - \alpha) = \sin(360^0 + \alpha) = \sin(540^0 - \alpha) =$$
$$= \sin(720^0 + \alpha) = \sin(-180^0 - \alpha) = \sin(-360^0 + \alpha) =$$
$$= \sin(-540^0 - \alpha) = \ldots$$

Ten ciąg równości możemy napisać w postaci

$$\sin\alpha = \sin(180^0 - \alpha) = \sin(2.180^0 + \alpha) = \sin(3.180^0 - \alpha) =$$
$$= \sin(4.180^0 + \alpha) = \sin(-180^0 - \alpha) = \sin(-2.180^0 + \alpha) =$$
$$= \sin(-3.180^0 - \alpha) = \ldots$$

Przyglądając się uważnie tym równościom, możemy z łatwością napisać następujący

Wzór ogólny: $\sin\alpha = \sin[n\,180^0 + (-1)^n\alpha]$, który powiada, że jeśli kąt α czyni zadość równaniu kształtu $y = \sin x$, wówczas czynią mu zadość wszystkie kąty, dane przez wzór

$$n\,.\,180^0 + (-1)^n\alpha, \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Z powyższego badania wynika, że *istnieje nieskończenie wiele kątów x, czyniących zadość równaniu*

$$y = \sin x.$$

Najmniejszą liczbę x, czyniącą zadość temu równaniu i mającą ten sam znak, co y, nazwiemy ***pierwiastkiem głównym równania***

$$y = \sin x.$$

Np. równaniu

$$\sin x = \tfrac{1}{2} \qquad (1)$$

czynią zadość kąty dodatnie

$$x = 30^0, 150^0, 390^0, \ldots$$

oraz kąty ujemne

$$x = -210^0, -330^0, \ldots$$

Wśród nich istnieje jeden najmniejszy i mający ten sam znak, co prawa strona równania (1); jest to kąt 30^0. Tak więc pierwiastkiem głównym równania (1) jest

$$x = 30^0.$$

Kąty mające ten sam kosinus.

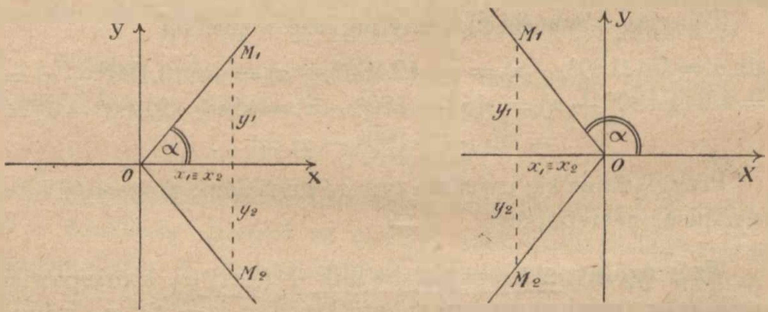
§ **38**. Rozumując tak samo, jak § 37, uczeń dowiedzie, że jeśli mamy dany jakikolwiek kąt $\sphericalangle XOM_1 = \alpha$, przyczem $\alpha < 360^0$, wówczas śród kątów mniejszych od 360^0 istnieje tylko jeden (na-

zwijmy go $\sphericalangle XOM_2$) taki, że między odciętemi punktów M_1 i M_2 obranych na ich ramionach, tak, że $OM_1 = OM_2$, zachodzi równość

$$x_2 = x_1,$$

a więc taki kąt, że

$$\cos(XOM_2) = \cos(XOM_1).$$



Rys. 58.

Jak widać z rysunku 58, między temi dwoma kątami zachodzi związek

$$\sphericalangle XOM_2 = 360^0 - \sphericalangle XOM_1,$$

a więc

$$\cos\alpha = \cos(360^0 - \alpha).$$

A teraz wyobraźmy sobie, że ramię OM kąta α zostało obróobrócone o $n \,.\, 360^0$ w zwrocie dodatnim lub ujemnym, gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą (dodatnią czy ujemną) albo też zerem. Wróciło ono do swego położenia, tak iż spółrzędne punktu M nie uległy zmianie wskutek obrotu, a więc i kosinus kąta nie uległ zmianie. Mamy tedy równości

$$\cos\alpha = \cos(360^0 - \alpha) = \cos(360^0 + \alpha) = \cos(720^0 - \alpha) = \ldots$$
$$= \cos(-\alpha) = \cos(-360^0 + \alpha) = \cos(-720^0 - \alpha) = \ldots$$

skąd wynika

Wzór ogólny: $\cos\alpha = \cos(n \,.\, 360^0 \pm \alpha)$,

który powiada, że jeśli kąt α czyni zadość równaniu $y = \cos x$, wówczas wszystkie kąty, czyniące zadość temu równaniu, wyrażają się wzorem

$$n \,.\, 360 \pm \alpha, \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.)$$

I znów dochodzimy do wniosku, że *równanie* $y = \cos x$ *posiada nieskończenie wiele rozwiązań. Wśród pierwiastków tego równania istnieje jeden dodatni, który posiada najmniejszą*

wartość; pierwiastek ten nazywa się ***pierwiastkiem głównym równania***

$$y = \cos x.$$

Np. równaniu

$$\cos x = -\tfrac{1}{2}$$

czynią zadość kąty dodatnie

$$x = 120^0,\ 240^0,\ 480^0,\ 600^0,\ \ldots.$$

oraz kąty ujemne

$$x = -120^0,\ -240^0,\ -480^0,\ \ldots.$$

Wśród tych kątów jeden dodatni, mianowicie kąt 120^0 posiada wartość najmniejszą, zatem

$$x = 120^0$$

jest pierwiastkiem głównym równania (1).

§ **39**. Jeżeli we wzorze ogólnym, dającym wszystkie rozwiązania równania $y = \cos x$, położymy $n = 0$, będziemy mieli

$$\cos \alpha = \cos(-\alpha).$$

Uczeń dowiedzie sam, że

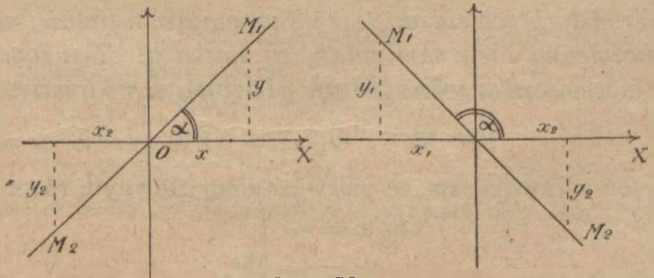
$$\sin \alpha = -\sin(-\alpha)$$
$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg}(-\alpha)$$
$$\operatorname{ctg} \alpha = -\operatorname{ctg}(-\alpha).$$

Kąty, mające ten sam tangens lub kotangens.

§ **40**. Ażeby dwa kąty miały ten sam tangens lub kotangens, trzeba i wystarcza, żeby było

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2},$$

gdzie x_1, y_1 są spółrzędnemi punktu M_1 na drugiem ramieniu jednego kąta, a x_2, y_2 są spółrzędnemi punktu M_2 na ramieniu drugiego kąta, przyczem $OM_1 = OM_2$.



Rys. 59.

Żeby spółrzędne dwóch różnych punktów M_1, M_2 czyniły zadość powyższej równości, trzeba i wystarcza, żeby punkty M_1 i M_2 były symetryczne względem punktu zerowego.

Mamy w takim razie

$$x_1 = -x_2, \quad y_1 = -y_2,$$

a więc istotnie

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}.$$

Między kątami $\sphericalangle XOM_1$, $\sphericalangle XOM_2$ zachodzi związek

$$\sphericalangle XOM_2 = 180^0 + \sphericalangle XOM_1,$$

mamy tedy wzory

$$\mathbf{tg}\,(\mathbf{180^0} + \alpha) = \mathbf{tg}\,\alpha$$
$$\mathbf{ctg}\,(\mathbf{180^0} + \alpha) = \mathbf{ctg}\,\alpha.$$

Uczeń sam wykaże prawdziwość wzorów

$$\sin(180^0 + \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(180^0 + \alpha) = -\cos\alpha.$$

Ponieważ, jak widać z rysunku, dodanie do kąta lub odjęcie od niego 180^0 nie zmienia jego tangensa ani kotangensa, zatem mamy

Wzory ogólne: $\mathbf{tg}\,\alpha = \mathbf{tg}\,(\boldsymbol{n}\,.\,\mathbf{180^0} + \alpha)$; $\mathbf{ctg}\,\alpha = \mathbf{ctg}\,(\boldsymbol{n}\,.\,\mathbf{180^0} + \alpha)$.
które powiadają, że *równania*

$$y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{ctg} x$$

mają nieskończenie wiele rozwiązań i że jeśli kąt α *czyni zadość jednemu z tych równań, to wszystkie kąty, objęte wzorem*

$$n\,.\,180^0 + \alpha,$$

gdzie $\boldsymbol{n}$ *jest albo zerem, albo dowolną liczbą całkowitą (dodatnią czy ujemną) czynią również zadość temu równaniu.*

Wśród tych rozwiązań jest jedno, mające najmniejszą wartość bezwzględną i ten sam znak, co liczba $\boldsymbol{y}$. *Rozwiązanie to nazwać możemy* ***pierwiastkiem głównym równania***

$$y = \operatorname{tg} x \quad \text{lub} \quad y = \operatorname{ctg} x.$$

Uczeń sprawdzi sam, że pierwiastkiem głównym równania

$$\operatorname{tg} x = -1$$

jest

$$x = -45^0.$$

Okresowość funkcyj trygonometrycznych.

§ **41.** Przy powyższych badaniach uwydatniła się bardzo ważna własność funkcyj trygonometrycznych: są to *funkcje okresowe*. Jeżeli np. kąt α zmieniać będziemy w sposób ciągły od 0^0 do 360^0, funkcja $\sin\alpha$ przebiegnie wszystkie wartości od -1 do $+1$; jeżeli kąt α zmieniać się będzie dalej od 360^0 do 720^0, $\sin\alpha$ przebiegnie znów te same wartości i w takim samym porządku. Taki właśnie jest sens wzoru

$$\sin\alpha = \sin(360^0 + \alpha).$$

Powiadamy, że 360^0 jest okresem funkcji $\sin\alpha$.

Uczeń wyznaczy okresy trzech pozostałych funkcyj.

Redukcja kątów do pierwszej ćwiartki.

§ **42.** Wzory, które otrzymaliśmy w poprzednich paragrafach, dają nam możność zastąpienia funkcyj dowolnego kąta przez funkcje kąta ostrego dodatniego.

Mamy np.

$$1)\qquad \begin{aligned} \operatorname{tg} 485^0 &= \operatorname{tg}(360^0 + 125^0) \\ &= \operatorname{tg} 125^0 \\ &= \operatorname{tg}(180^0 - 55^0) \\ &= -\operatorname{tg} 55^0. \end{aligned}$$

$$2)\qquad \begin{aligned} \sin(-512^0) &= -\sin 512^0 \\ &= -\sin(360^0 + 152^0) \\ &= -\sin 152^0 \\ &= -\sin(180^0 - 28^0) \\ &= -\sin 28^0. \end{aligned}$$

Ćwiczenia XII. 1. Podane poniżej funkcje trygonometryczne zastąpić przez równe im funkcje kątów ostrych dodatnich:

$\cos 605^0$, $\operatorname{tg} 290^0$, $\sin 240^0$, $\sin 765^0$,
$\operatorname{ctg} 317^0$, $\cos(-670^0)$, $\sin(-812^0)$, $\operatorname{tg}(-214^0)$.

2. Następujące funkcje zastąpić przez równe im funkcje kąta φ:

$\sin(260^0 - \varphi)$, $\operatorname{tg}(260^0 - \psi)$, $\cos(248^0 - \varphi)$,
$\operatorname{ctg}(560^0 - \psi)$, $\cos(\varphi - 200^0)$, $\operatorname{tg}(540^0 + \psi)$.

3. Opierając się na tem, że

$$90^0 + \alpha = 180^0 - (90^0 - \alpha),$$

znaleźć wzory redukcyjne dla funkcyj

$$\sin(90^0 + \alpha),\qquad \cos(90^0 + \alpha),\qquad \operatorname{tg}(90^0 + \alpha)$$

i sprawdzić te wzory geometrycznie w przypadku, gdy kąt α jest kątem ostrym.

4. W sposób analogiczny znaleźć wzory redukcyjne dla funkcyj

$$\sin(270^0 + \alpha), \qquad \cos(270^0 + \alpha), \qquad \text{tg}\,(270 + \alpha).$$

5. Przedstawić następujące wyrażenia w postaci najprostszej:

$$\text{(I)}\ \frac{\sin(180^0 - A) . \cos(270^0 - A)}{\sin(180^0 + A) . \cos(270^0 + A)}$$

$$\text{(II)}\ \frac{\cos(180^0 - A) . \sin(360^0 - A) . \text{ctg}\,(90^0 + A)}{\text{tg}\,(180^0 + A) . \cos(-A) . \text{tg}\,(90^0 - A)}$$

$$\text{(III)}\ \frac{\cos(90^0 - A) . \cos(180^0 - A) . \text{tg}\,(180^0 + A)}{\sin(90^0 + A) . \sin(180^0 - A) . \text{tg}\,(180^0 - A)}$$

6. Sprawdzić następujące równości:

(I) $\cos(90^0 + A) + \cos(90^0 - A) + \sin(180^0 + A) + \sin A = 0,$

(II) $\text{ctg}\,(270^0 - A) + \text{ctg}\,(270^0 + A) = \text{tg}\,A + \text{tg}\,(-A)$

(III) $\cos(180^0 + A) + \sin(180^0 + A) + \sin(270^0 + A).$
$= \sin(270^0 - A) + \cos(180^0 - A) + \sin(-A).$

7. Sprawdzić następujące równości, w których przez A, B, C, oznaczono kąty trójkąta:

$$\sin\frac{C}{2} = \cos\frac{A+B}{2}$$

$$\cos\frac{C}{2} = \sin\frac{A+B}{2}$$

$$\sin C = \sin(A+B)$$

$$\cos C = -\cos(A+B)$$

8. Znaleźć z dokładnością do 1′ wszystkie kąty α, β, γ, czyniące zadość następującym równaniom i mniejsze od 360⁰:

$$\cos\alpha = -0{,}4237 \qquad \sin\beta = -0{,}8215 \qquad \text{ctg}\,\gamma = -1{,}6667.$$

9. Jakie są ogólne wzory dla kątów α, β, γ, czyniących zadość następującym równaniom:

$$\sin\alpha = 0{,}5725 \qquad \cos\beta = -0{,}7524 \qquad \text{tg}\,\gamma = -\sqrt{3}.$$

Jakie są pierwiastki główne tych równań? 4,148

10. Dowieść, że wzór

$$\sin\alpha = \cos(90^0 - \alpha)$$

pozostaje prawdziwy, gdy $\alpha > 90^0$.

11. Przez środek kwadratu o boku $= 1$ przechodzi prosta, która przecina dwa jego boki w punktach A i B, przedłużenia zaś dwu drugich boków w punktach C i D. Obliczyć długości odcinków AB i CD w zależności od kąta α między prostą CD a przekątną kwadratu; zbadać i wykreślić otrzymane funkcje. Czy całe krzywe, czy tylko pewne ich łuki odpowiadają treści geometrycznej zadania? Czy funkcje te są okresowe? Jeżeli tak, to jak wielkie są ich okresy?

12. To samo zadanie, jeżeli zamiast kwadratu mamy dany sześciokąt foremny.

13. Dokoła środka ciężkości trójkąta foremnego obraca się prosta, która przecina jego boki w punnktach A i B. Długość odcinka AB wyrazić jako funkcję kąta γ między tą prostą a wysokością trójkąta. Z rozważań geometrycznych wysnuć, jaki winien być okres tej funkcji, i sprawdzić, czy otrzymany okres zgadza się z wzorem, którym wyraziliśmy naszą funkcję.

Opierając się na wzorach redukcyjnych, możemy rozwiązywać niektóre proste równania trygonometryczne.

Przykład I. $\sin 2\alpha = \sin(\alpha + x)$,

gdzie α jest kątem danym, x zaś kątem szukanym.

Z równania wynika bezpośrednio, że

albo $$\alpha + x = 2\alpha + n \,.\, 360^0$$

czyli $$x_1 = \alpha + n \,.\, 360^0 \qquad (1)$$

albo też $$\alpha + x = 180^0 - 2\alpha + n \,.\, 360^0$$

skąd $$x_2 = (2n + 1)\; 180^0 - 3\alpha \qquad (2)$$

Otrzymaliśmy dwie serje rozwiązań, z których każda składa się z nieograniczonej liczby pierwiastków. Obie te serje (1) i (2) możemy ująć razem zapomocą wzoru ogólnego (str. 73). Możemy mianowicie napisać

$$\alpha + x = n \,.\, 180^0 + (-1)^n \,.\, 2\alpha,$$

skąd $$x = n \,.\, 180^0 + \alpha\,[2 \,.\, (-1)^n - 1].$$

Przykład II. $\sin(\alpha + \varphi) = \cos 5\varphi$; *znaleść kąt* φ.

Przekształcamy równanie tak, by w obu jego częściach mieć tę samą funkcję trygonometryczną, np. kosinus. Mamy tedy

$$\cos[90^0 - \alpha - \varphi] = \cos 5\varphi,$$

a więc $$5\varphi = n \,.\, 360^0 \pm (90^0 - \alpha - \varphi)$$

zatem musi być

albo $$\varphi_1 = \frac{4n+1}{6} \,.\, 90^0 - \frac{\alpha}{6}$$

albo $$\varphi_2 = \frac{4n-1}{4} \,.\, 90^0 + \frac{\alpha}{4} \,.$$

Otrzymaliśmy znów dwie serje pierwiastków, każda zaś składa się z nieograniczonej liczby pierwiastków.

Uczeń rozwiąże ten sam przykład, zastępując kosinus przez sinus.

Przykład III.
$$\cos\alpha + \cos 3\alpha = 0$$
$$\cos 3\alpha = -\cos\alpha$$
$$= \cos(180^0 + \alpha)$$
$$3\alpha = n\,.\,360^0 \pm (180^0 + \alpha),$$

zatem albo
$$\alpha_1 = \frac{2n+1}{2}\,.\,180^0.$$

albo też
$$\alpha_2 = \frac{2n-1}{4}\,.\,180^0.$$

Znów mamy dwie serje pierwiastów, z których każda składa się z nieograniczonej liczby pierwiastków.

Rozwiązać następujące równania:

14. $\operatorname{tg} 2\varphi = \operatorname{tg}(3\varphi - \alpha)$.
15. $\operatorname{tg}(x - \alpha) + \operatorname{ctg}(3x - \beta) = 0$.
16. $\sin(x + 45^0) = \cos\left(90^0 - \frac{x}{2}\right)$.
17. $\sin(270^0 + x) + \cos 3x = 0$.
18. $\operatorname{tg}(x + 60^0) + \operatorname{ctg}(90^0 - 3x) = 0$.
19. $\operatorname{tg}^2(x + \alpha) - \operatorname{tg}^2\beta = 0$.

20—22. Rozwiązać układy równań:

20. $\sin(2x + y) = \frac{1}{2}$; $\operatorname{tg}(x + 2y) = 1$,
21. $\operatorname{tg}(x - y) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$; $\operatorname{ctg}(x + y) = 0$,
22. $\cos(2x + y) = \frac{1}{2}$; $\sin(3x - y) = \frac{1}{2}$.

23. Znaleźć wzór ogólny dla kątów, których sinus (albo kosinus, albo tangens) równa się odpowiednio sinusowi (albo kosinusowi, albo tangensowi) kąta α, wziętemu zo znakiem przeciwnym.

24—27. Kąty x i α są oba dodatnie i mniejsze od 180^0. W jakich granicach muszą być zawarte te kąty, żeby były spełnione nierówności:

24. $\cos x + \cos\alpha > 0$.
25. $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2\alpha > 0$.
26. $\cos x + \cos\alpha < 0$.
27. $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2\alpha < 0$.

§ **43**. W rozdziale I mieliśmy nieraz sposobność do wyznaczania sinusa kąta, gdy dany był jego kosinus, lub odwrotnie. Posługiwaliśmy się przytem tożsamością
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \qquad (11)$$
lecz z dwóch pierwiastków, wynikających z tej tożsamości, uwzględnialiśmy zawsze tylko pierwiastek dodatni, chodziło bowiem o funkcje kąta ostrego. Obecnie możemy już zrozumieć znaczenie drugiego pierwiastku.

Przykład I. *Obliczyć* cos α, *mając dane, że* $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, *i zakładając, że* $0^0 < \alpha < 360^0$.

Ponieważ $\qquad \cos^2\alpha + \frac{4}{9} = 1,$

zatem $\qquad \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}.$

Mamy tedy dwie odpowiedzi

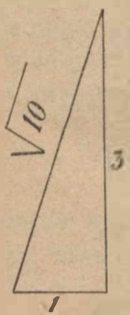
$$\left.\begin{aligned}\sin\alpha_1 &= \frac{2}{3}\\ \cos\alpha_1 &= \frac{\sqrt{5}}{3}\end{aligned}\right| \text{ czyli } \alpha_1 = 41^0\,49' \text{ (z dokładnością do } 1')$$

oraz

$$\left.\begin{aligned}\sin\alpha_2 &= \frac{2}{3}\\ \cos\alpha_2 &= -\frac{\sqrt{5}}{3}\end{aligned}\right| \text{ czyli } \alpha_2 = 138^0\,11' \text{ (z dokładnością do } 1').$$

Przykład II. $\operatorname{tg}\alpha = 3$; *obliczyć* sin α i cos α *zakładając, że* $0^0 < \alpha < 360^0$.

Posługując się sposobem, wskazanym na str. 45, mamy (rys. 60)



Rys. 60.

$$\left.\begin{aligned}\sin\alpha_1 &= \frac{3\sqrt{10}}{10}\\ \cos\alpha_1 &= \frac{\sqrt{10}}{10}\end{aligned}\right| \text{ czyli } \alpha_1 = 71^0\,34' \text{ (z dokł. do } 1')$$

albo też

$$\left.\begin{aligned}\sin\alpha_2 &= -\frac{3\sqrt{10}}{10}\\ \cos\alpha_2 &= -\frac{\sqrt{10}}{10}\end{aligned}\right| \text{ czyli } \alpha_2 = 251^0\,34' \text{ (z dokł. do } 1').$$

Przykład III. *Rozwiązać równanie*

$$4\cos^2\vartheta - 8\sin\vartheta + 1 = 0.$$

Chcąc mieć w równaniu jedną tylko funkcję kąta ϑ, zastępujemy $\cos^2\vartheta$ przez $1 - \sin^2\vartheta$. Mamy tedy

$$4\sin^2\vartheta + 8\sin\vartheta - 5 = 0. \tag{1}$$

Kładąc $\qquad \sin\vartheta = x,\quad$ mamy równanie kwadratowe

$$4x^2 + 8x - 5 = 0 \tag{2}$$

z warunkiem, że $\qquad -1 \leqslant x \leqslant 1.$

Rozwiązując równanie (2), otrzymujemy

$$x_1 = -\tfrac{5}{2}$$
$$x_2 = \tfrac{1}{2}.$$

Tylko drugi pierwiastek równania czyni zadość postawionemu warunkowi, zatem

$$\sin \vartheta = \tfrac{1}{2}$$

czyli

$$\vartheta_1 = n \,.\, 360^0 + 30^0$$
$$\vartheta_2 = (2n+1)\, 180^0 - 30^0.$$

Przykład IV. *Rozwiązać rownanie* $6 \cos^2 x + \sin x - 5 = 0$.

Mamy po przekształceniu równania danego:

$$6 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0,$$

skąd albo $\sin x = \tfrac{1}{2}$

albo $\sin x = -\tfrac{1}{3}$,

zatem

albo
$$x_1 = n \,.\, 360^0 + 30^0$$
$$x_2 = (2n+1)\, 180^0 - 30^0$$

albo też
$$x_3 = n \,.\, 360^0 - 19^0 28'$$
$$x_4 = (2n+1)\, 180^0 + 19^0 28'$$

Ćwiczenia XIII. 1—12. Rozwiązać następujące równania:

1. $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x = 0$.
2. $\operatorname{tg}^4 x - 4 \operatorname{tg}^2 x + 3 = 0$.
3. $\operatorname{tg} \vartheta + \operatorname{ctg} \vartheta = \frac{10}{3}$.
4. $\cos \vartheta - \sin \vartheta = \frac{1}{2}$.
5. $\operatorname{tg} \varphi = \cos \varphi$.
6. $\operatorname{tg} \varphi = \cos \varphi + 1$.
7. $\sin^2 \alpha - 2 \cos \alpha + \frac{1}{4} = 0$.
8. $2\sqrt{3} \,.\, \cos^2 \alpha = \sin \alpha$.
9. $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 2$.
10. $\operatorname{ctg} \varphi - ab \operatorname{tg} \varphi = a - b$.
11. $\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1 - \cos x}{1 - \sin x}$.
12. $\dfrac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} = \dfrac{\sin^2 x \cos^2 x}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$.

Równania jednorodne względem sinusa i kosinusa dają się sprowadzić do prostszej postaci, jeżeli przekształcimy je tak, by sinus i kosinus zastąpić przez tangens lub kotangens.

13—15. Rozwiązać następujące równania:

13. $\cos^2 \vartheta - \frac{2}{3}\sqrt{3} \,.\, \sin \vartheta \cos \vartheta - \sin^2 \vartheta = 0$.
14. $2 \sin^2 \varphi + \sin \varphi \cos \varphi - \cos^2 \varphi = 1$.
15. $7 \sin^2 \psi + 3 \sin \psi \cos \psi - 4 \cos^2 \psi = 5$.

15—20. Rozwiązać następujące układy równań:

15. $\operatorname{tg}(x-y)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\operatorname{tg}(x+y)=0$.

16. $\cos(x+y)=\frac{1}{2}$.

$\operatorname{ctg}(x+y)=\sqrt{3}$.

17. $\sin(2x+y)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\operatorname{tg}(3x-y)=1$.

18. $\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=1$.

$\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^2 y=2$.

19. $\sin x+\sin y=\sqrt{2}$.

$\sin^2 x+\sin^2 y=2$.

20. $\cos(x-y)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin(x-y)=\cos(x+y)$.

Wykresy funkcyj trygonometrycznych.

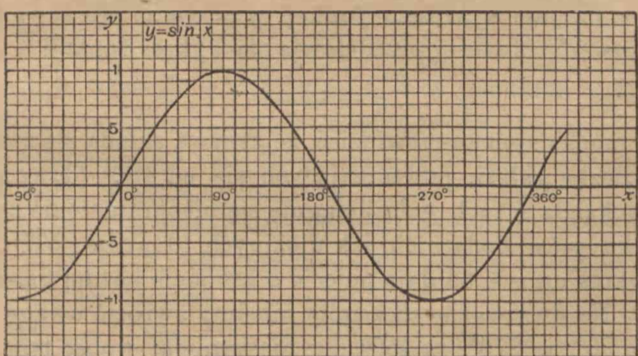
§ **44.** Mając pod ręką tablice wartości naturalnych funkcyj trygonometrycznych, możemy już obecnie zbudować wykresy funkcyj dla dowolnego argumentu. Chcąc np. zbudować wykres funkcji

$$y=\sin x,$$

możemy na osi odciętych odmierzyć w dowolnej skali odcinki, których długości wyobrażać będą wielkości kątów wyrażone w stopniach; rzędnemi będą w takim razie wartości sinusa, odpowiadające tym kątom. Ponieważ funkcja $\sin x$ jest okresowa, a mianowicie:

$$\sin x=\sin(360^0+x)=\sin(2.360^0+x)=\ldots.$$
$$=\sin(-360^0+x)=\sin(-2.360^0+x)=\ldots,$$

zatem zgóry przewidzieć można, że wykres naszej funkcji składać się musi z nieograniczonej liczby identycznych gałęzi krzywej,



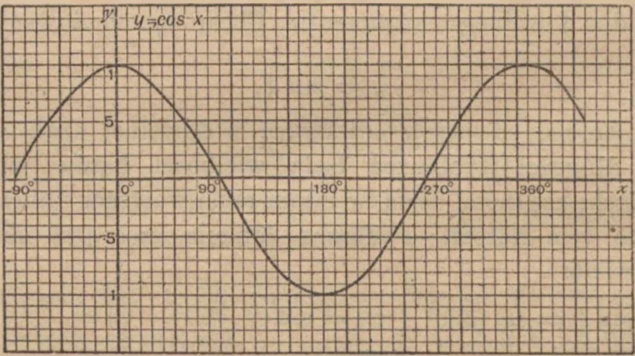
$y=\sin x$.

Rys. 61.

które powtarzają się co 360^0, cała zaś krzywa ciągnie się nieograniczenie zarówno w lewo, jak w prawo od osi y-ów (gdyż zmienna x przybierać może dowolnie wielkie wartości dodatnie i ujemne). Natomiast krzywa musi być ograniczona zarówno nad osią, jak i pod osią x-ów, gdyż y może zmieniać się tylko od -1 do $+1$ (dlaczego?)

Na rys. 61 mamy część wykresu funkcji $y = \sin x$. Widzimy, że powtarzająca się gałąź krzywej (którą zakreśla punkt o spółrzędnych x, y, gdy x zmienia się od 0^0 do 360^0, od 360^0 do 720^0, ... od 0^0 do -360^0...) ma kształt fali. Krzywa ta zwie się *sinusoidą*.

Uczeń wykreśli jakąś większą część sinusoidy, np. dla x, zmieniającego się w granicach od -180^0 do 540^0.



$y = \cos x$.

Rys. 62.

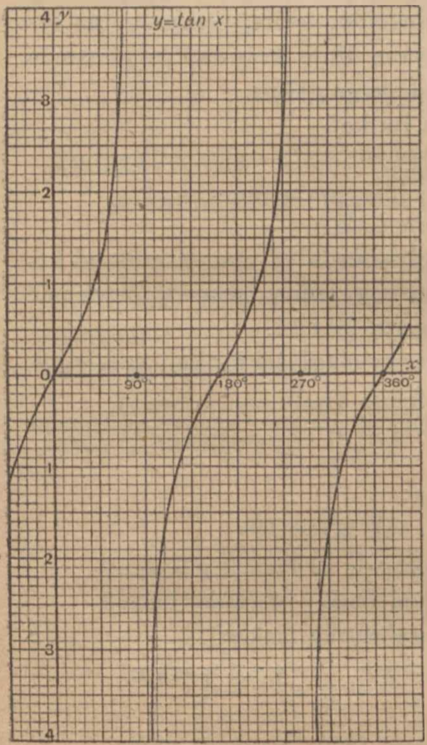
Rys. 62 jest wykresem funkcji $y = \cos x$. Krzywa ta zwie się *kosinusoidą*. Inaczej przedstawia się wykres funkcji

$$y = \operatorname{tg} x.$$

Tu można zgóry przewidzieć, że krzywa składa się z nieograniczonej liczby gałęzi, powtarzających się co 180^0 (dlaczego?), przyczem każda z tych gałęzi ciągnie się nieograniczenie zarówno w kierunku y ów dodatnich, jak ujemnych (dlaczego?).

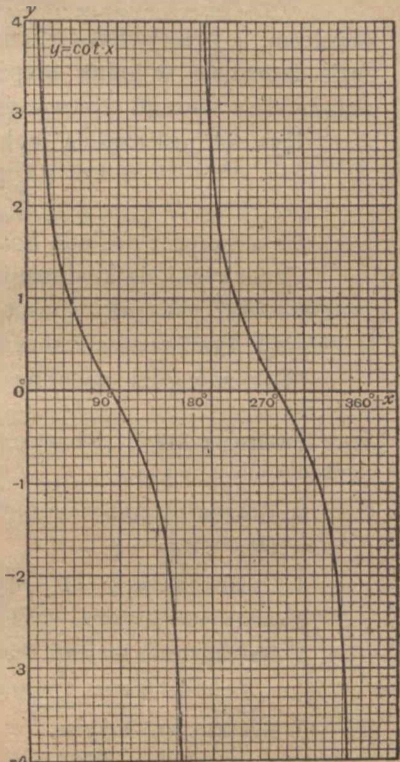
Wykres na rys. 63 daje pojęcie o kształcie każdej gałęzi *tangensoidy*. Na dwa ważne szczegóły musimy zwrócić uwagę. Wiemy, że $\operatorname{tg} 90^0$, $\operatorname{tg} 270^0$, $\operatorname{tg} 450^0$, ... nie istnieją; wobec tego, jeżeli w punktach osi x-ów, odpowiadających ... -90^0, 90^0, 270^0, ... wystawimy do tej osi prostopadłe, nie natrafimy na żaden punkt

tangensoidy. Jeżeli natomiast taką prostopadłą przesuniemy dowolnie mało w prawo lub w lewo, przetnie ona tangensoidę w jednym punkcie. Prostopadłe do osi x-ów, wystawione w wymienionych punktach, są *asymptotami* tangensoidy. (Porównać z asymptotami hiperboli! Ile asymptot posiada tangensoida?)



$y = \tan x.$

Rys. 63.



$y = \cot x.$

Rys. 64.

Powtóre, funkcja $y = \operatorname{tg} x$ posiada w punktach $x = -90^0$, 90^0, 270^0, ... *przerwy ciągłości*, a mianowicie

1) wymienionym wartościom zmiennej niezależnej x nie odpowiada żadna wartość zmiennej y;

2) jeżeli na x weźmiemy np. dwie wartości dowolnie mało różniące się od 90^0, lecz położone po dwóch stronach punktu $x = 90^0$, a więc wartości

$$90^0 + \varepsilon, \quad 90^0 - \varepsilon, \quad (\varepsilon > 0, \text{ lecz dowolnie małe}),$$

wówczas pierwszej wartości odpowiada bardzo duża ujemna wartość tangensa, drugiej zaś bardzo duża wartość dodatnia tangensa.

Wyrażając się popularnie, lecz nie ściśle, możemy powiedzieć: gdy x, rosnąc w sposób ciągły, przechodzi przez wartość $x = 90^0$, funkcja $\operatorname{tg} x$ skacze raptownie od wartości dodatnich do ujemnych, przyczem w chwili, gdy $x = 90^0$, funkcja przestaje istnieć.

Wykres doskonale uzmysłowić nam może ten fakt przerwy ciągłości: w przeciwieństwie do sinusoidy, której poszczególne gałęzie łączą się w jedną nieprzerwaną linję krzywą, tangensoida składa się z szeregu oderwanych od siebie gałęzi.

Rys. 64 jest częścią wykresu funkcji

$$y = \operatorname{ctg} x.$$

Ile asymptot posiada *kotangensoida?*

Czem różni się kosinusoida od sinusoidy? tangensoida od kotangensoidy? W jaki sposób możemy jedną krzywą otrzymać z drugiej? Porównać z wzorami na str. 30 i 11.

Wskazać, gdzie zachodzą przerwy ciągłości funkcji $y = \operatorname{ctg} x$.

Ćwiczenia XIV. 1. Na wykresie funkcji $y = \sin x$ znaleźć rozwiązania równania $\sin x = \frac{1}{3}$.

2. Rozwiązać graficznie równania:

(I) $\cos x = -\frac{2}{3}$. (II) $\operatorname{tg} x = 1{,}5$.

4. Czem funkcja $y = 1 - \sin x$ rózni się od funkcji $y = \sin x$? Naszkicować krzywą, wyobrażającą zmiany pierwszej funkcji.

5. Naszkicować krzywe, ilustrujące zmiany funkcyj

$y = 1 + \cos x$; $y = 2 - \operatorname{tg} x$; $y = 1 + \operatorname{ctg} x$.

6. Naszkicować krzywe

$y = \sin (x + 90^0)$; $y = \sin (x + 180^0)$; $y = (x + 450^0)$.

7. Czem krzywa $y - 2 = \sin (x - 15^0)$ różni się od krzywej $y = \sin x$?

8. Wykazać, iż krzywa $y = \sin x$ posiada nieskończenie wiele środków symetrji.

Czy można to samo powiedzieć o kosinusoidzie i tangensoidzie?

Jak obrać należy stałą c, żeby początek spółrzędnych był środkiem symetrji krzywej $y = a \sin (bx + c)$?

9. Dana jest krzywa $y = a \sin (bx + c)$; wykazać: 1) że ma ona nieskończenie wiele osi symetrji; 2) że punkt krzywej, jednakowo odległy od dwóch sąsiednich osi symetrji, jest środkiem symetrji tej krzywej.

10. Wykreślić krzywe: (I) $y = \sin x - \cos x$,

(II) $y = \sin x + \cos x$

dwoma sposobami: albo przez dodawanie rzędnych sinusoidy i kosinusoidy; albo przez obliczenie wartości y dla $x = 0^0, 30^0, 60, \ldots\ldots$

Czy krzywe te przecinają oś x ów?

11. Naszkicować krzywą $y = \frac{1}{\sin x}$, a następnie sprawdzić swoje rozumowanie przez dokładne wykreślenie tej krzywej.

12. Naszkicować krzywą $y = \sin x \,.\, \mathrm{tg}\, x$.

13. Naszkicować krzywą $y = \sin x \,.\, \cos x$.

14. Naszkicować krzywą $y = \mathrm{tg}^2 x - 1$.

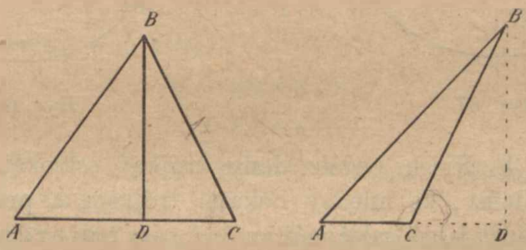
ROZDZIAŁ III.

Związki między elementami trojkąta dowolnego. Cztery zasadnicze przypadki rozwiązywania trójkątów.

Pole trójkąta.

§ **45.** Pojęcie funkcyj kąta dowolnego daje nam możność otrzymania prostego i dogodnego w zastosowaniach praktycznych wzoru na pole trójkąta.

Niech będzie dany jakikolwiek trójkąt ABC (rys. 65 i 66). Jeżeli poprowadzimy w nim wysokość BD, spodek jej D leżeć



Rys. 65 i 66.

będzie bądź na boku AC, bądź na jego przedłużeniu. Wiemy z geometrji elementarnej, że w obu wypadkach mamy

$$S = \frac{b\,.\,h}{2},$$

gdzie S oznacza pole trójkąta, h — długość jego wysokości BD.

Z trójkąta BCD mamy $h = a \sin(BCD)$;

w pierwszym przypadku

$$\sphericalangle BCD = C$$

w drugim zaś przypadku

$$\sphericalangle BCD = 180^0 - C,$$

w obu jednak przypadkach mamy

$$\sin(BCD) = \sin C \qquad \text{(dlaczego?)}$$

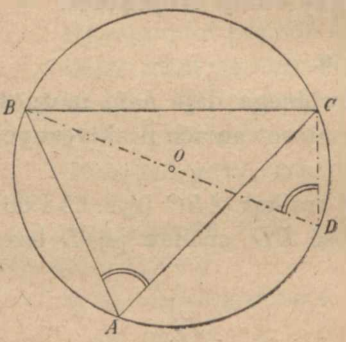
Wobec tego musi być $h = a \sin C$

oraz

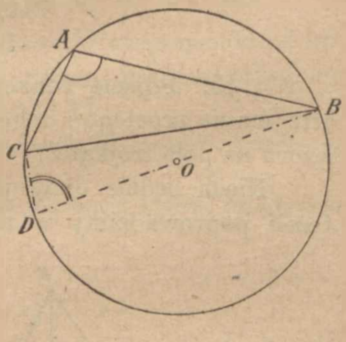
$$S = \frac{ab \sin C}{2}.$$

Czyli *pole trójkąta równa się połowie iloczynu z długości dwóch jego boków przez sinus kąta, zawartego między niemi.*

Wzór sinusów.



Rys. 67.



Rys. 68.

§ **46.** I. Niech będzie dany trójkąt ostrokątny $\triangle ABC$ (rys. 67). Wiemy, że między bokami trójkąta a przeciwległemi kątami zachodzi jakaś zależność (z jakich twierdzeń geometrycznych wnosić można o istnieniu tej zależności?); chcąc ją wyrazić zapomocą wzoru, musimy uciec się do figury, którą już dokładnie zbadaliśmy, t. j. do trójkąta prostokątnego. Musimy mianowicie utworzyć trójkąt prostokątny w ten sposób, żeby jednym jego bokiem był np. bok a trójkąta danego a zarazem tak, żeby jeden z jego kątów ostrych równał się kątowi A danego trójkąta. Aby taki trójkąt prostokątny zbudować, wystarczy na danym trójkącie opisać koło, przez wierzchołek B poprowadzić średnicę BD i punkt D połączyć z trzecim wierzchołkiem, t. j. z punktem C. Promień koła oznaczmy przez R, a więc BD przez $2R$.

Mamy wtedy

$$\sphericalangle D = \sphericalangle A \qquad \text{(dlaczego?)}$$

z trójkąta zaś $\triangle\ BDC$ wnosimy, że

$$a = 2R \,.\, \sin A,$$

co możemy napisać w postaci

$$\frac{a}{\sin A} = 2R.$$

Uczeń łatwo sprawdzi, że ten sam wynik otrzymujemy dla pozostałych boków i kątów trójkąta. Tak więc

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R, \qquad \text{(III)}$$

czyli *stosunek boku trójkąta do sinusa przeciwległego kąta jest wielością stałą, a mianowicie równa się długości średnicy koła, opisanego na trójkącie.*

II. Jeżeli trójkąt dany $\triangle\ ABC$ jest rozwartokątny (np. $A > 90^0$, jak na rys. 68), wówczas z łatwością sprawdzić można, że wzór (III) pozostaje prawdziwy dla kątów ostrych B i C. Co się tyczy kąta rozwartego A, to, prowadząc średnicę BD, otrzymamy trójkąt prostokątny $\triangle\ BDC$, w którym

$$\sphericalangle D = 180^0 - \sphericalangle A \qquad \text{(dlaczego?)}$$

a więc $\qquad \sin D = \sin A$

I znów mamy z $\triangle\ CBD$

$$a = 2R \sin D$$
$$= 2R \sin A,$$

zatem wzór sinusów jest prawdziwy również w zastosowaniu do trójkąta rozwartokątnego.

Uczeń sprawdzi sam, czy wzór ten pozostaje prawdziwy i wówczas, gdy $A = 90^0$.

Mamy tedy następujące

Twierdzenie. *Boki i kąty każdego trójkąta spełniają następujący układ równań*

$$A + B + C = 180^0$$
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

§ **47. Twierdzenie odwrotne:** *Jeżeli mamy dane sześć liczb dodatnich, mianowicie długości trzech odcinków a, b, c oraz miary trzech kątów A, B, C i jeżeli liczby te sprawdzają następujący układ równań*

$$A + B + C = 180^0 \qquad (1)$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \qquad (2)$$

wówczas istnieje trójkąt, w którym miarami elementów są dane liczby.

Istotnie, z równania (1) widać, że możemy zbudować trójkąt, w którym kąty równają się A, B, C bok zaś przeciwległy kątowi A równa się a. Oznaczmy przez b' i c' dwa pozostałe boki tego trójkąta. Na mocy wzoru (III) musi być

$$\frac{b'}{\sin B} = \frac{c'}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \qquad (3)$$

z porównania zaś związków (3) i (2) widać, że musi być

$$b = b'; \quad c = c',$$

tak iż sześć danych liczb możemy uważać za miary elementów zbudowanego przez nas trójkąta.

Zastosowanie wzoru sinusów do rozwiązywania trójkątów ogólnych.

§ **48**. Widzieliśmy, że w każdym trójkącie zachodzi związek

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

W skład tej równości wchodzą cztery elementy trójkąta a, b, A, B; jeśli więc znamy trzy z pośród nich, możemy obliczyć czwarty.

Zwróćmy jeszcze uwagę na to, że

$$A + B + C = 180^0,$$

t. j. że jeśli mamy dane dwa kąty trójkąta, to znamy również trzeci.

Wobec tego zapomocą wzoru sinusów możemy rozwiązać trójkąt, w którym mamy dane

albo I) A, C, b, t. j. dwa kąty i jeden bok,

„ II) a, b, A, t. j. dwa boki i kąt przeciwległy jednemu z nich.

Pierwszy przypadek rozwiązywania trójkątów.

§ **49**. *Rozwiązać trójkąt, mając dane dwa kąty A, C oraz bok b.*

SPOSÓB PIERWSZY.

Mamy najpierw $B = 180^0 - (A + C)$,
zatem $\sin B = \sin (A + C)$.

Wobec tego z wzoru sinusów wynika, że

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin (A + C)},$$

zatem

$$a = \frac{b \cdot \sin A}{\sin (A + C)}.$$

Dalej mamy

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A},$$

skąd

$$c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A}.$$

Aby zadanie było możliwe do rozwiązania, trzeba i wystarcza, żeby było

$$A + C < 180^0.$$

SPOSÓB DRUGI.

Rachunek moglibyśmy wykonać inaczej. Możemy np. obliczyć najpierw średnicę koła opisanego (lub jej logarytm)

$$2R = \frac{b}{\sin (A + C)},$$

następnie obliczyć boki a, c ze wzorów

$$a = 2R \cdot \sin A$$
$$c = 2R \cdot \sin C.$$

Ta druga postać rachunku jest wtedy dogodniejsza, gdy do jakichś dalszych obliczeń potrzebny nam jest promień koła opisanego.

Pokażemy na przykładzie, jak należy układać rachunki.

Przykład. *Rozwiązać trójkąt, mając dane*

$A = 42^0 17'$, $C = 71^0 10'$, $a = 33{,}57$ cm.

DANE:	OBLICZONE:
$A = 42^0 17'$	$B = 66^0 33'$
$C = 71^0 10'$	$b = 45{,}77$
$a = 33{,}57$	$c = 47{,}22.$

Rachunek pomocniczy: $A + C = 113^0 27'$
$B = 180^0 - 113^0 27'$
$= 66^0 33'$.

OBLICZENIE BOKU *b*.		OBLICZENIE BOKU *c*.	
$b = \frac{a \, . \sin B}{\sin A}$		$c = \frac{a \, . \sin C}{\sin A}$	
$a = 33,57$	$\lg a = 1,5259$		$\lg a = 1,5259$
$B = 66^0 33'$	$\lg\sin B = 1,9626$	$C = 71^0 10'$	$\lg\sin C = 1,9761$
$A = 42^0 17'$	$\operatorname{colg}\sin A = 0,1721$		$\operatorname{colg}\sin A = 0,1721$
	$\lg b = 1,6606$		$\lg c = 1,6741$
	$b = 45,77$ cm.		$= 47,22$ cm.

Uwagi. 1. Logarytm liczby czterocyfrowej, podany w naszych tablicach, zawierać może błąd, który zawsze jest mniejszy od 0,00005 (co do wartości bezwzględnej).

Ponieważ, obliczając boki b i c, dodawaliśmy do siebie po trzy logarytmy, zatem obliczone przez nas wartości $\lg b$ i $\lg c$ zawierać mogą błędy, które jednak są mniejsze (co do wartości bezwzględnej) od 0,00015. Możemy tedy twierdzić, że

$$1,6604 < \lg b < 1,6608$$
$$1,6739 < \lg c < 1,6743,$$

stąd zaś wynika (porównaj dane w tablicach!), że

$$45,75 < b < 45,79$$
$$47,20 < c < 47,24.$$

Widzimy, że błąd, zawarty w znalezionych wartościach b i c, jest napewno mniejszy od 0,02 jeżeli dane w zadaniu wartości A, C, a uważamy za dokładne.

2. Rachunek nasz należałoby sprawdzić, racjonalnego jednak sprawdzenia dokonywać można tylko zapomocą wzorów, któremi w danym rachunku nie posługiwaliśmy się. Otóż na razie nie znamy jeszcze najodpowiedniejszego do tego celu wzoru, zwanego *wzorem Newtona*.

Drugi przypadek rozwiązywania trójkątów.

§ **50**. Jeżeli z dwóch kątów i boku budujemy trójkąt, otrzymujemy zawsze tylko jedno rozwiązanie, o ile zadanie jest wogóle możliwe czyli o ile suma dwu danych kątów jest mniejsza od 180^0. Dowód to, że dwa kąty i bok wyznaczają jednoznacznie trójkąt.

Tak jednak nie jest, jeżeli chcemy zbudować trójkąt, mając dane dwa boki i kąt, przeciwległy jednemu z nich. Z kursu geometrji wiemy, że zadanie to nie zawsze jest możliwe, jeżeli zaś jest możliwe, to może mieć bądź jedno, bądź dwa rozwiązania.

Uczeń przedewszystkiem rozwiąże i przedyskutuje szczegółowo zadanie konstrukcyjne

zbudować trójkąt, mając dane a, b, A;

następnie zaś porówna otrzymane na drodze geometrycznej wyniki z podaną poniżej dyskusją zadania:

rozwiązać trójkąt, mając dane a, b, A.

Z pośród trzech nieznanych elementów B, C, c obliczamy najpierw kąty. A więc

$$\sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a} \tag{1}$$

$$C = 180^0 - (A + B) \tag{2}$$

wreszcie

$$c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A}. \tag{3}$$

DYSKUSJA. Przedewszystkiem z równania (1) wynika, że $\sin B$ wówczas tylko może istnieć, jeżeli

$$b \sin A \leqslant a.$$

(Jaki jest sens geometryczny tej nierówności? Co oznacza geometrycznie $b \sin A$?).

Co się tyczy kąta A, to może on być ostry, prosty lub rozwarty. Po kolei rozważymy te trzy przypadki.

I. $A = 90^0$. W takim razie $\sin A = 1$, a więc

$$\sin B = \frac{b}{a}.$$

Zadanie nie posiada rozwiązania, jeżeli $b > a$ (dlaczego?) lub jeśli $b = a$, gdyż w tym wypadku mielibyśmy $B = 90^0$.

Jeżeli $b < a$, wówczas $\sin B < 1$; zadanie posiada jedno rozwiązanie, gdyż z dwóch kątów B, mających ten sam sinus dodatni i mniejszych od 360^0, jeden tylko jest ostry, drugi zaś rozwarty, a więc nie czyni zadość postawionemu warunkowi, że $A = 90^0$.

II. $A > 90^0$. Zadanie nie posiada rozwiązań, jeżeli mamy $b \geqslant a$, gdyż w takim razie byłoby $B \geqslant A$, a więc mielibyśmy

w trójkącie dwa kąty rozwarte. Jeżeli mamy $b < a$, wówczas tembardziej musi być $b \sin A < a$, czyli $\sin B < 1$. Zadanie jest możliwe i posiada tylko jedno rozwiązanie, gdyż z dwóch kątów B, mających ten sam sinus dodatni i mniejszych od 360^0, jeden jest rozwarty i nie czyni zadość warunkowi $A > 90^0$.

III. $A < 90^0$. Jeżeli $b \leqq a$, wówczas $b \sin A < a$, a więc $\sin B < 1$. Zadanie jest możliwe do rozwiązania i posiada tylko jedno rozwiązanie. Istotnie, z dwóch kątów B, mających ten sam sinus, tylko kąt ostry czyni zadość warunkom zadania, gdyż z warunku $b \leqq a$ wynika, że musi być $B \leqq A < 90^0$.

Jeżeli wreszcie przy $A < 90^0$ ~~mamy~~ $b > a$, wówczas musimy odróżnić trzy przypadki:

α) albo $b \sin A > a$, w takim razie rozwiązania niema,

β) „ $b \sin A = a$; wtedy $B = 90^0$ i mamy jedno rozwiązanie.

γ) „ $b \sin A < a$; wtedy na B otrzymujemy dwie wartości, mianowicie $B_1 < 90^0$ i $B_2 = 180^0 - B_1$. Obie są możliwe i zadanie ma dwa rozwiązania.

Wynik dyskusji streścić można w następującej tabliczce:

$A \geqq 90^0$	$b \geqq a$		0 rozwiązań
	$b < a$		1 rozwiązanie
$A < 90^0$	$b \leqq a$		1 rozwiązanie
	$b > a$	$b \sin A > a$	0 rozwiązań
		$b \sin A = a$	1 rozwiązanie
		$b \sin A < a$	2 rozwiązania.

Jak widzimy, tylko w przypadku, gdy $A < 90^0$ a zarazem $a < b$, musimy obliczyć kąt B, jeśli chcemy ustalić liczbę rozwiązań; we wszystkich innych wypadkach liczbę i rodzaj rozwiązań można z góry przewidzieć.

§ **51. Przykład I.** *Rozwiązać trójkąt, mając dane* a $= 5{,}386$ m., b $= 2{,}687$ m., A $= 102^0 32'$.

Ponieważ $A > 90^0$, $b < a$, zatem zadanie ma jedno rozwiązanie.

DANE:	OBLICZONE:
$a = 5{,}386$	$B = 29^0 09'$
$b = 2{,}687$	$C = 48^0 19'$
$A = 102^0 32'$	$c = 4{,}121$.

RACHUNEK POMOCNICZY: $\sin A = \sin(180^0 - A) = \sin 77^0 28'$.

OBLICZENIE KĄTA *B*.

$$\sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a}$$

$b = 2,687$	$\lg b = 0,4293$
$A = 102^0 32'$	$\lg\sin A = \bar{1},9895$
$a = 5,386$	$\operatorname{colg} a = \bar{1},2687$
	$\lg\sin B = \bar{1},6875$
	$B = 29^0\,09'$
	$C = 180^0 - 131^0 41'$
	$= 48^0\,19'$

OBLICZENIE BOKU *c*.

$$c = \frac{\sin C \cdot a}{\sin A}$$

$C = 48^0 19'$	$\lg\sin C = \bar{1},8732$
	$\operatorname{colgsin} A = 0,0105$
	$\lg a = 0,7313$
	$\lg c = 0,6150$
	$c = 4,121$

Uwaga. Sprawdzić rachunku nie możemy, nie znając jeszcze *wzorów Newtona*.

Przykład II. *Rozwiązać trójkąt, mając dane* a = 177, b = 216,5 A = 35°26'.

Ponieważ $A < 90^0$, $b > a$, zatem o liczbie rozwiązań będziemy mogli sądzić dopiero po obliczeniu kąta *B*.

OBLICZENIE KĄTA *B*.

$$\sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a}$$

$b = 216,5$	$\lg b = 2,3355$
$A = 35^0 26'$	$\lg\sin A = \bar{1},7633$
$a = 177$	$\operatorname{col} a = \bar{3},7520$
	$\lg\sin B = \bar{1},8508$
	$B_1 = 45^0\,10'$
	$B_2 = 134^0\,50'$

RACHUNEK POMOCNICZY.

$$A + B_1 = 80^0\,36'$$
$$A + B_2 = 170^0\,16'$$

OBLICZENIE KĄTA *C*.

$$C = 180^0 - (A + B)$$
$$C_1 = 180^0 - 80^0\,36' = 99^0\,24'$$
$$C_2 = 180^0 - 170^0\,16' = 9^0\,44'$$

OBLICZENIE BOKU c_1. OBLICZENIE BOKU c_2.

$$c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A}.$$

$a = 177$	$\lg a = 2,2480$
$C_1 = 99^0 24'$	$\lg\sin C_1 = \bar{1},9941$
$A = 35^0 26'$	$\operatorname{colgsin} A = 0,2367$
	$\lg c_1 = 2,4788$
	$c_1 = 301,2$

	$\lg a = 2,2480$
$C_2 = 9^0\,44'$	$\lg\sin C_2 = \bar{1},2281$
	$\operatorname{colgsin} A = 0,2367$
	$\lg c_2 = 1,7128$
	$c_2 = 51,62$

Ćwiczenia XV. 1. Ze wzoru na pole trójkąta wysnuć wzór sinusów.

2. Dwa boki trójkąta są stałej długości, kąt zaś między niemi zawarty jest zmienny; kiedy pole tego trójkąta jest największe?

Otrzymać ten sam wynik zapomocą rozważeń geometrycznych.

3. Dany jest równoległobok o bokach a, d i kącie między niemi zawartym A. O ile wzrośnie jego pole, jeżeli boki zwiększymy odpowiednio o x i y?

4. Mamy dane dwa trójkąty $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, przyczem $A = 180^0 - A'$; jaki jest stosunek pól tych trójkątów?

5. Dowieść, że pole trójkąta równa się $\frac{abc}{4R}$, gdzie R jest promieniem koła opisanego.

6. Opierając się na poprzedniem zadaniu, wyrazić pole trójkąta zapomocą promienia R i sinusów wszystkich trzech kątów trójkąta.

7. Wyrazić pole trójkąta zapomocą promienia koła wpisanego i sumy trzech boków, a następnie opierając się na zad. 6, wyrazić promień koła wpisanego jako funkcję promienia koła opisanego oraz trzech kątów trójkąta.

8. Środek koła opisanego na $\triangle ABC$ łączymy z wierzchołkiem A i kreślimy promień, prostopadły do boku b. Dowieść na tej figurze wzoru sinusów: 1) w przypadku, gdy $B < 90^0$, 2) w przypadku, gdy $B > 90^0$.

9. Środek koła opisanego połączyć z trzema wierzchołkami trójkąta ostrokątnego i dowieść, że pole trójkąta wyrazić można wzorem

$$\frac{R}{2}(a \cos A + b \cos B + c \cos C).$$

Czy wzór jest prawdziwy dla trójkąta rozwartokątnego?

10. Jeżeli przez d_A oznaczymy długość dwusiecznej wewnętrznej kąta A w trójkącie $\triangle ABC$, wówczas mamy

$$d_A\,(b + c) \,.\, \sin\frac{A}{2} = bc \,.\, \sin A.$$

11. M jest dowolnym punktem na boku a trójkąta ABC, przyczem $\sphericalangle AMB = \vartheta$; wyrazić długość odcinka AM jako funkcję kąta ϑ, boku a i pola trójkąta. Jak zmienia się AM, jeżeli A porusza się po równoległej do BC, bok zaś a jest stały? Naszkicować obraz tej funkcji.

12. Uzasadnić następujący sposób graficzny mierzenia pola czworoboku.

Dany jest dowolny czworobok $ABCD$, którego boki mierzymy jakąkolwiek jednostką, np. calami. Przez C kreślimy równoległą do BD, która przecina w punkcie E przedłużenie boku AB. Ze środka E promieniem $= 2$ jednostkom miary kreślimy koło i prowadzimy styczną AM. Przez wierzchołek D prowadzimy równoległą do AB, która przecina prostą AM w punkcie X. Odcinek AX ma tyle jednostek długości, ile jednostek kwadratowych zawiera dany czworobok.

(*Egzamin wstępny do szkoły wojskowej w Woolwich*).

13. Jeżeli między kątami trójkąta zachodzi związek

$$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C,$$

wówczas trójkąt jest prostokątny.

14. Jeżeli w trójkątach ABC, $A'B'C'$ mamy

$$A = A',\ B + B' = 180^0,$$

wówczas boki, między któremi zawierają się kąty C i C', tworzą proporcję.

15. Mając dany trójkąt ABC, obliczyć boki i kąty trójkąta $A'B'C'$, gdzie AA', BB', CC' są wysokościami trójkąta danego.

16. W trójkącie ABC, w którym $C > 90^0$, prowadzimy wysokość CD oraz $DE \parallel AC$. Rozwiązać trójkąt BDE, mając dane $a = 415$, $A = 35^0\,10'$ $C = 108^0\,45'$.

17. Rozwiązać następujące trójkąty:

α) $a = 14{,}91$	$A = 29^0\,48'$	$B = 46^0\,06'$
β) $a = 188{,}4$	$B = 28^0\,12'$	$C = 95^0\,36'$
γ) $b = 54{,}49$	$A = 18^0\,32'$	$B = 126^0\,12'$
δ) $c = 458{,}3$	$A = 18^0\,18'$	$B = 129^0\,48'$
ε) $c = 0{,}1708$	$B = 129^0\,06'$	$C = 34^0\,45'$.

18. Obliczyć dwusieczne wewnętrzne w trójkątach α) i β) poprzedniego zadania.

19. Obliczyć dwusieczne zewnętrzne, poprowadzone z wierzchołków B i C do przedłużenia przeciwległych boków w trójkątach γ) i δ) zadania 17,

20. Rozwiązać następujące trójkąty:

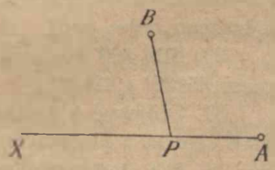
α) $a = 23{,}73$	$b = 22{,}98$	$A = 63^0\,20'$
β) $a = 8{,}164$	$c = 3{,}776$	$A = 52^0\,18'$
γ) $b = 0{,}507$	$c = 0{,}4428$	$B = 157^0\,14'$
δ) $a = 77{,}12$	$c = 68{,}24$	$C = 64^0\,52'$
ε) $b = 6{,}811$	$c = 5{,}005$	$C = 45^0\,55'$.

22. Zbudować trójkąt, mając dane a, b, R. Rozwiązać trójkąt, mając dane $a = 40{,}15$, $b = 52{,}18$, $R = 49{,}12$.

23. Jeżeli A' jest środkiem boku BC w trójkącie ABC, wówczas musi być

$$b \,.\, \sin(A'AC) = c \,.\, \sin(BAA').$$

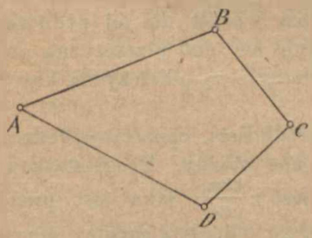
24. Mechanizm przedstawiony na rys. 69, składa się z pręta AX, osadzonego na zawiasie w punkcie A, i z pręta BP, osadzonego na zawiasie w punkcie B, przyczem wzajemne położenie punktów A i B nie zmienia się. Koniec pręta BP ślizga się po AX.



Rys. 69.

1) W pewnej chwili $\sphericalangle\, BAP = 40^0\,22'$. Obliczyć $\sphericalangle\, PBA$, jeżeli

$AB = 2{,}45$, $BP = 1{,}65$.



Rys 70.

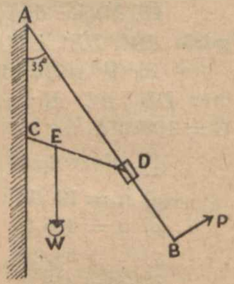
2) O jaki kąt obróci się pręt BP, jeżeli pręt AX, obracając się dokoła A, zbliży się o 20^0 do prostej AB?

25. W czworoboku przegubowym $ABCD$ mamy $AB = AD = 6{,}75$, $BC = CD = 4{,}55$, $\sphericalangle\, BAD = 50^0$. O ile wzrośnie odległość między punktami A i C, jeżeli czworobok złożymy tak, że B upadnie na D?

26. Pręt AB na rys. 71 obraca się dokoła A, pręt CD obraca się dokoła C, pierścień zaś D ślizga się po AB. W punkcie E przyczepiony jest ciężar W. Pierwotnie $\sphericalangle BAC = 35^0$.

O ile centymetrów podniesie się ciężar W jeżeli siła P, działając na pręt AB, obróci ten pręt o 10^0?

$AC = 11{,}4$ cm., $CD = 14{,}6$ cm., $CE = 3{,}9$ cm.



Rys. 71.

27. Dany jest trójkąt ABC wpisany w koło. Niech A', B', C' będą środkami łuków, podpartych przez jego boki. Dowieść, że pole trójkąta $A'B'C'$ równa się $2R^2 \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

28. Jeżeli w trójkącie zachodzi związek

$$\frac{\sin A}{\sin B} = 2\cos C,$$

wówczas trójkąt jest równoramienny.

29. W trójkącie ABC znaleźć na boku c taki punkt M, żeby było $ML \cdot MK = a \cdot BK$, gdzie ML, MK są to prostopadłe, poprowadzone odpowiednio do boków b i a.

[Wskazówka: Obliczyć najpierw w najprostszej postaci odcinek $MA = x$, następnie znaleźć sposób skonstruowania tego odcinka].

30. Rozwiązać poprzednie zadanie w założeniu, że punkt M spełnia warunek $ML \cdot MK = c \cdot BM$.

31. Zbudować trójkąt ABC i rozwiązać ten trójkąt, mając dane: B, C, h_a.

32. Przez wierzchołek A trójkąta prowadzimy dowolną poprzeczną AX do boku BC, która dzieli trójkąt ABC na dwa trójkąty: T_1 i T_2. 1) Wykazać, że stosunek promieni kół, opisanych na T_1 i T_2 równa się $b:c$. 2) Co dzieje się z długością poprzecznej, gdy X zbliża się nieograniczenie do C? Co dzieje się wówczas z promieniem koła, opisanego na T_2? Jaki stąd wynika wzór na promień koła, stycznego do BC w punkcie C i przechodzącego przez punkt A?

33. Siłę 120 dyn rozłożyć na dwie składowe, nachylone do niej pod kątami $35^0 30'$ i $42^0 10'$.

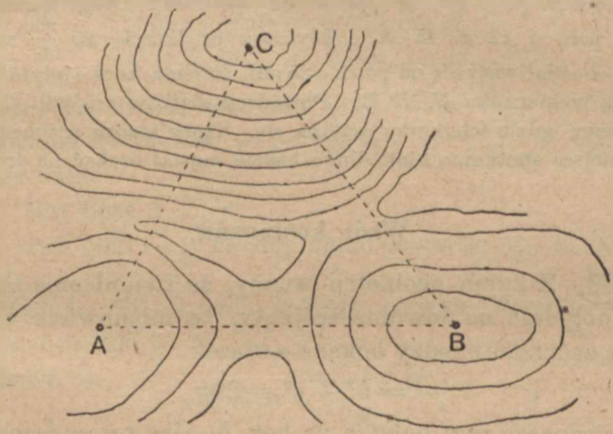
34. Obliczyć z dokładnością do 0,1 metra wysokość wieży AB, jeżeli, obserwując ją z punktu O, oddalonego od podnóża A o 215,3 m, znaleźliśmy, że kąt depresji punktu A wynosi $6^0 14'$, kąt wzniesienia punktu B równa się $12^0 08'$.

35. W chwili, gdy wysokość słońca nad horyzontem $= \alpha$, wieża AB rzuca cień długości l m. na drogę, prowadzącą wprost do jej podnóża. Obliczyć wysokość wieży, jeżeli droga znajduje się pod płaszczyzną poziomą, przechodzącą przez podnóże wieży i tworzy z tą płaszczyzną kąt β ($\alpha = 36^0 30'$, $\beta = 28^0 40'$, $l = 84{,}75$ m.).

36. Dwa statki, jadące z jednostajną prędkością, opuszczają jednocześnie ten sam port, lecz skierowują się w różne strony. Drogi statków tworzą z sobą kąt α; prędkość jednego statku jest $v \frac{\text{klm.}}{\text{g.}}$; jaka jest prędkość drugiego statku, jeżeli po upływie n godzin odległość między niemi wynosi d kilometrów? Jaki jest warunek możliwości zadania?

37. Kąty w trójkącie mają się do siebie tak, jak 3 : 4 : 5; obliczyć stosunek boków.

38. Rys. 72 przedstawia mapę z trzema wzgórzami A, B, C, z których najwyższem jest C. Szczyty A i B wznoszą się odpowiednio na 510 m. i 630 m. nad poziomem morza. Kąt elewacji wierzchołka C, obser-



Rys. 72.

wowany z punktu A, równa się 22^0, odległość $AB = 4500$ m., w rzuci poziomym $\sphericalangle CAB = 50^0$, w takim że rzucie $\sphericalangle CBA = 46^0$.

Dwoma sposobami oznaczyć wysokość C nad poziomem morza oraz elewację wierzchołka C, zmierzoną w punkcie B, a mianowicie:

1) zapomocą konstrukcji geometrycznej w skali 1 : 10000,
2) zapomocą rachunku.

(*Egzamin do szkoły wojskowej w Sandhurst*)

39. Dwaj obserwatorowie A i B znajdują się od siebie w odległości 100 m. i obserwują ten sam punkt C. Obserwator A konstatuje, że względem niego C leży o 13^0 na wschód od północy, B zaś znajduje się o 83^0 na wschód od północy. Obserwator B stwierdza, że C znajduje się względem niego o 17^0 na zachód od północy.

Znaleźć odległość od B do C w dwojaki sposób:

1) zapomocą rysunku w skali 1 : 500,
2) zapomocą rachunku.

40. Jadąc po prostej drodze PQR, obserwujemy dwa wzgórza A i B, położone oba po jednej stronie drogi. Gdy znajdziemy się w P, spostrzegamy, że $\sphericalangle RPA = 25^0$, $\sphericalangle RPB = 42^0$. W chwili gdy znajdujemy się w Q, jedno wzgórze zakrywa drugie i spostrzegamy, że $\sphericalangle RQA = 62^0 30'$. Jak wielka jest odległość od A do B, jeżeli $PQ = 5$ klm.?

41. Cyklista wyrusza z punktu A i jedzie na północ z prędkością jednostajną $7{,}5 \frac{\text{klm.}}{\text{g.}}$. Z punktu B, położonego o 10 klm. od A w kierunku $N.\ 41^0\ E.$ (t. zn. „o 41^0 na wschód od północy"), wyrusza jednocześnie

piechur, z prędkością 5 $\frac{\text{klm.}}{\text{g.}}$. W jakim kierunku winien iść piechur, jeśli chcę spotkać się z cyklistą? 2) kiedy to spotkanie nastąpi?

42. Statek opuszcza port o 12-ej godz. i płynie z prędkością jednostajną 15 $\frac{\text{mil}}{\text{g.}}$ najpierw w kierunku *N*. 35° *W*. (t. j. 35° na zachód od północy), a o 13 g. 50 m. zmienia kurs i płynie z tą samą prędkością w kierunku *E*. 40° *N*. (t. j. 40° na północ od wschodu). Drugi statek opuszcza ten sam port o 12 g. 45 m. i płynie z prędkością 20 $\frac{\text{mil}}{\text{g.}}$ w kierunku *E*. 20° *N*., a oddaliwszy się od portu o 25 mil, zmienia kurs i płynie z tą samą prędkością w kierunku *N*. 15° *W*. Dowódzcy statków umówili się, że spotkają się tam, gdzie ich kursy przetną się. Który statek przybędzie pierwszy na miejsce spotkania i jak długo będzie musiał czekać na drugi statek?

Wzór kosinusów.

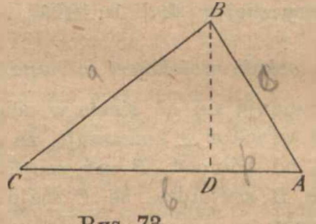
§ **52.** Z kursu geometrji wiemy, że twierdzenie Pitagorasa daje się uogólnić na dowolne trójkąty, że mianowicie w każdym trójkącie zachodzi między bokami związek

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bp \tag{1}$$

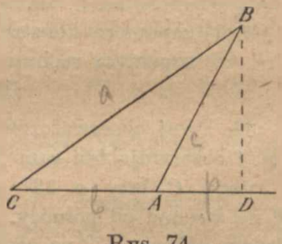
(gdzie p oznacza rzut boku c na bok b) albo też związek

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bp \tag{2}$$

zależnie od tego, czy kąt A jest ostry czy rozwarty. Zapomocą funkcyj trygonometrycznych możemy oba wzory ująć w jeden, a to w sposób następujący.



Rys. 73.



Rys. 74.

Bez względu na wielkość kąta A mamy zawsze

$$AD = p = c \,.\cos(BAD),$$

a więc jeżeli $A < 90^0$, mamy

$$p = c \,.\cos A,$$

jeżeli zaś $A > 90^0$, wówczas

$$p = -c \,.\cos A.$$

Wobec tego zarówno wzór (1), jak (2) przybierają postać

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A} \tag{IV}$$

Uczeń wypisze odpowiednie wzory dla $\cos B$ i $\cos C$ [1]).

Mamy tedy następujące

Twierdzenie. *W każdym trójkącie boki i kąty spełniają następujący układ równań:*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Wzory te, zwane wzorami kosinusów, dają nam możność rozwiązywania trójkątów w przypadku III i IV, a mianowicie: gdy mamy dane

III) trzy boki a, b, c;

IV) dwa boki i kąt między niemi zawarty, np. a, b, C.

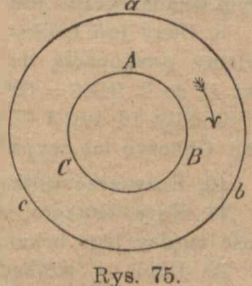
Przykład. *Rozwiązać trójkąt, mając dane* $a = 251{,}7$; $b = 105{,}8$; $c = 305{,}1$.

Wiemy, że
$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

Posługując się tablicą kwadratów, znajdujemy następujące wartości przybliżone (z dokładnością do 10):

$$a^2 = 63350$$
$$c^2 = 93090$$
$$a^2 + c^2 = 156440$$
$$b^2 = 11200$$
$$a^2 + c^2 - b^2 = 145240$$

$$\tfrac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2) = 72620$$
$$ac = 76800 \quad \text{(dokł. do 10)}$$
$$\cos B = \frac{72620}{76800} = 0{,}9456$$
$$B = 18^\circ 59'$$



Rys. 75.

[1]) Wzory odnoszące się do jednakowych elementów trójkąta, np. do boków, do kątów, do środkowych i t. d., dają się otrzymać jedne z drugich zapomocą przemian kołowych. W celu ułatwienia sobie odpowiednich zmian we wzorach, wpisujemy na okręgu koła w równych odstępach elementy, o które chodzi (w naszym przykładzie boki a, b, c); jeżeli wyobrazimy sobie, że obróciliśmy okrąg koła o 120° w zwrocie, wskazanym przez strzałkę, wówczas A zostanie zastąpione przez C, C przez B, wreszcie B przez A i tak samo a zostanie zastąpione przez c, c przez b, b przez a. Po tej pierwszej przemianie możemy otrzymać drugą przez dalszy obrót o 120°.

Widzimy, że rozwiązywanie trójkątów zapomocą wzoru kosinusów jest dość kłopotliwe, nawet przy użyciu tablicy kwadratów, zwłaszcza jeżeli mamy do czynienia z liczbami większemi. Będziemy tedy musieli poszukać innych związków między elementami trójkąta, dogodnych do rachunku logarytmicznego. Niemniej jednak wzór kosinusów oddawać nam nieraz będzie wielkie usługi, bądź jako ogniwo pośrednie w rachunku, bądź w zadaniach, nie wymagających obliczeń logarytmicznych.

Ćwiczenia XVI. 1. Czy wzór kosinusów jest prawdziwy w zastosowaniu do trójkąta prostokątnego?

2. Z nierówności $-1 < \cos A < 1$ i z wzoru na $\cos A$ wysnuć, że suma dwóch boków trójkąta jest większa, różnica zaś mniejsza od trzeciego boku.

3. Dwa punkty poruszają się ruchem jednostajnym po okręgach spółśrodkowych, których promienie równają się odpowiednio 5 m. i 9. m. Promienie, poprowadzone do tych punktów, obracają się dokoła środka z prędkością: mniejszy 30^0 na minutę, większy 40^0 na minutę. W pewnej chwili oba punkty znajdują się na jednym promieniu większego koła. Po ilu sekundach odległość między niemi wynosić będzie 6 m., jeżeli ruch obu punktów odbywa się w tym samym zwrocie?

4. Wykazać, że kąty dwuścienne foremnego czworościanu i foremnego ośmiościanu spełniają się. Obliczyć następnie te kąty z dokładnością do 1′.

[Wskazówka: przez krawędź czworościanu poprowadzić płaszczyznę, prostopadłą do krawędzi przeciwległej].

5. Obliczyć kąt dwuścienny w dwudziestościanie foremnym.

6. Czworościan foremny $ABCD$ przecięto płaszczyzną, przesuniętą przez AB i prostopadłą do CD. Pole przekroju równa się S. Obliczyć objętość czworościanu.

7. Dany jest ostrosłup prosty o podstawie sześciokątnej foremnej. Bok podstawy $= a$, wysokość ostrosłupa $= h$. Obliczyć kosinus kąta, pod którym ściana boczna jest nachylona do podstawy.

8. Dany jest trójkąt ABC, w którym $A = 30^0$. W wierzchołku A wystawiamy prostopadłą do płaszczyzny trójkąta i na niej obieramy taki punkt D, że $\sphericalangle BDA = 60^0$, $\sphericalangle CDA = 45^0$. Dowieść, że $AD = BC$.

9. Siły 16 dyn i 42 dyn, działające na ten sam punkt, tworzą kąt $35^0 20'$. Obliczyć ich wypadkową.

10. Rozwiązać trójkąt, mając dane $A = 45^0$, $b = 4$, $c = \sqrt{2}$.

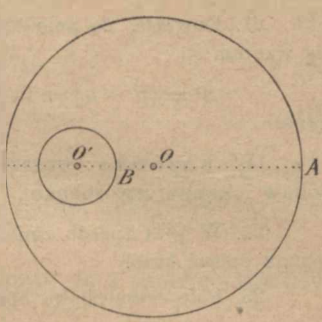
11. Kąty trójkąta tworzą postęp arytmetyczny; znaleźć prostą zależność między jego bokami.

12. Jeżeli w trójkącie prostokątnym równoramiennym, w którym $C = 90^0$, obierzemy dowolny punkt D na przedłużeniu boku AB, wówczas musi być

$$2\,CD^2 = AD^2 + BD^2.$$

Czy związek ten pozostanie prawdziwy, jeżeli punkt D znajdzie się w wierzchołku B? jeżeli znajdzie się na boku AB?

13. Dane są dwa koła (rys. 76), z których jedno ma promień r, drugie $\frac{1}{3}r$. Odległość ich środków $= \frac{1}{3}r$. Po okręgach kół poruszają się w tym samym zwrocie ruchem jednostajnym dwa punkty, które wyruszają jednocześnie z położeń A i B i w tym samym czasie dokonywują całkowitego obiegu. Wyrazić każdorazową odległość między punktami jako funkcje kąta α, o który obrócił się promień AO. Z wzoru tego odczytać, kiedy odległość między niemi jest największa lub najmniejsza.



Rys. 76.

14. Jeżeli punkty A, B, C leżą na jednej prostej, punkt zaś O nie leży na niej, wówczas mamy związek

$$OA^2 \cdot BC + OC^2 \cdot AB = OB^2 \cdot AC + AB \cdot BC \cdot AC.$$

Jest to t. zw. *twierdzenie Stewarta.*

Czy twierdzenie pozostanie prawdziwe, jeżeli O obierzemy na prostej AC?

15. Jeżeli boki trójkąta ABC tworzą postęp geometryczny, wówczas trójkąt, zbudowany z trzech jego wysokości, jest podobny do trójkąta ABC.

16. Dwa koła o promieniash r i r' przecinają się pod kątem α; obliczyć odległość d ich środków oraz ich spólną cięciwę m.

17. Dane są dwie proste, przecinające się w punkcie O pod kątem α. Na jednej z nich obieramy po obu stronach punktu O dwa punkty A i B takie, że $AO = a$, $BO = b$, gdzie a i b są to liczby dane. Ile można znaleźć na drugiej prostej takich punktów M, żeby było $\sphericalangle AMO = \sphericalangle BMO$?

18. Punkty A i B na kuli ziemskiej leżą oba na równoleżniku 52^0, różnica zaś ich długości geograficznych wynosi $32^0 15'$. Obliczyć: 1) promień równoleżnika; 2) długość odcinka AB prostej; 3) długość łuku koła wielkiego na ziemi, przechodzącego przez punkty A i B.

Promień kuli ziemskiej = 6350 klm.

18. Dowieść, że w trójkącie mamy

$$a^2 = (b + c)^2 - 4bc \cos^2 \frac{A}{2}$$

$$a^2 = (b - c)^2 + 4\, bc \sin^2 \frac{A}{2}.$$

[Wskazówka: wprowadzić do rysunku odcinek $b + c$].

29. Opierając się na własnościach funkcyj jednorodnych [1]), dowieść, że

$$\frac{1}{V_a^2} = \frac{1}{V_b^2} + \frac{1}{V_c^2} - \frac{2 \cos A}{V_b\, V_c},$$

[1]) Funkcja jednorodna n-tego stopnia zmiennych $x, y, z \ldots$ posiada tę własność charakterystyczną, że jeśli zmienne $x, y, z \ldots$, zastąpimy przez

gdzie przez V_a, V_b, V_c oznaczyliśmy objętości brył, które trójkąt ABC zakreśla, jeżeli obracamy go dokoła boków a, b, c.

21. Dowieść, że pole S dowolnego czworoboku wypukłego wyraża się wzorem

$$S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cos^2 \alpha,$$

gdzie

$$2\alpha = A + C.$$

[Wskazówka: wyrazić dwoma sposobami przekątną BD zapomocą boków i kątów czworoboku].

22. W jaki sposób zmieni się wzór powyższy, jeżeli na czworoboku można opisać koło?

23. Pole czworoboku opisanego wyraża się wzorem:

$$S^2 = abcd \sin^2 \alpha.$$

24. Jeżeli czworobok jest tego rodzaju, że można zarówno wpisać w niego koło, jak na nim opisać koło, wówczas pole czworoboku wyraża się wzorem

$$S^2 = abcd, \text{ promień zaś koła } = \frac{2\sqrt{abcd}}{a+b+c+d}.$$

25. Dany jest czworobok przegubowy o bokach a, b, c, d (stałej długości). Opierając się na zadaniu 21, odpowiedzieć na następujące pytania: (I) czy pole jego jest zmienne czy stałe? (II); jeżeli pole zmienia się, to w jaki sposób? czy osiąga kiedykolwiek wartość największą lub najmniejszą?

26. W czworoboku wpisanym mamy

(I) $$\cos B = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$$

(II) $$\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ba + cd}}$$

(III) $$ef = ac + bd$$

(IV) $$\frac{e}{f} = \frac{ad + bc}{ab + cd}$$

§ **53. Twierdzenie odwrotne** (względem § 52). *Jeżeli mamy dane sześć liczb dodatnich, mianowicie miary trzech odcinków*

---

wielkości proporcjonalne, t. j. jeżeli położymy $x = \lambda X$, $y = \lambda Y$, $z = \lambda Z$, ... wówczas funkcja nie zmieni kształtu, lecz zostanie pomnożona przez λ^n, gdzie n oznacza stopień funkcji. Np. funkcja jednorodna $cx^2 - axy + by^2$ zamieni się po podstawieniu w $\lambda^2 (cX^2 - aXY + bY^2)$.

Opierając się na tej własności, możemy zastąpić w równaniu jednorodnem wszystkie zmienne przez wielkości proporcjonalne — nie zmieni to pierwiastków równania.

a, b, c *oraz miary trzech kątów* A, B, C, *sprawdzające układ równań*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cb \cos A \tag{1}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \tag{2}$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba \cos C \tag{3}$$

i jeżeli przytem każdy z kątów A, B, C *jest mniejszy od* 180^0, *wówczas istnieje trójkąt, w którym miarami elementów są dane liczby.*

Z ćwiczenia XVI, 2 na str. 102 wiemy, że z naszych równań wynika, iż

$$|b - c| < a < b + c,$$

zatem z odcinków a, b, c możemy zbudować trójkąt. Oznaczmy przez A', B', C' kąty jego, przeciwległe odpowiednio bokom a, b, c. Na mocy wzoru **(IV)** musi być

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2ab \cos A'. \tag{4}$$

Porównywując równanie (1) i (4) widzimy, że $\cos A = \cos A'$, ponieważ zaś oba te kąty są mniejsze od 180^0, zatem

$$A = A'.$$

Tak samo dowodzimy, że $B = B'$ i $C = C'$.

Uwaga. Z twierdzeń odwrotnych, dowiedzionych w §§ 47 i 53 wynika, że jeżeli przy rozwiązywaniu trójkąta posługiwaliśmy się wzorem sinusów lub kosinusów (albo jakimś równoważnym im układem), wówczas przy dyskusji wystarczy sprawdzić, czy znalezione wartości boków są dodatnie i czy każdy ze znalezionych kątów zawiera się między 0^0 a 180^0.

§ **54**. *Związki, wyrażone wzorami* **III** *i* **IV** *są równoważne, jeżeli* a, b, c *są liczbami dodatniemi, kąty zaś* A, B, C *zawierają się między* 0^0 *a* 180^0.

Istotnie, jeżeli np. zachodzi układ równań z § 53, wówczas możemy zbudować trójkąt, w którym miarami elementów są liczby a, b, c, A, B, C. Ale w zbudowanym trójkącie zachodzą związki **(III)** I odwrotnie: jeżeli mamy dany układ taki, jak w § 47, możemy zbudować trójkąt ABC, odpowiadający temu układowi,

a między elementami tego trójkąta zachodzić muszą związki, wyrażone wzorem (IV).

Uwaga. Widzimy, że układy równań §§ 47 i 53 nie są od siebie niezależne, że każdy z nich powinien być konsekwencją drugiego. Jakoż wkrótce poznamy przekształcenia trygonometryczne, które pozwolą nam otrzymać którykolwiek z tych układów, jeżeli mamy dany drugi układ.

Wzory Newtona.

§ **55**. W celu otrzymania innych związków między elementami trójkąta, dogodniejszych do rachunku logarytmicznego, weźmy pod uwagę figurę, którą nieraz posługiwaliśmy się przy rozwiązywaniu zadań konstrukcyjnych w kursie geometrji.

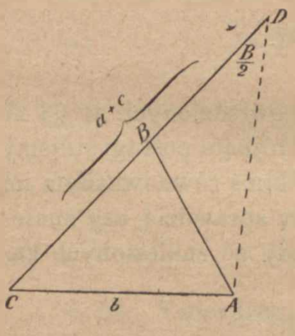
Niech będzie dany trójkąt $\triangle ABC$. Na przedłużeniu boku CB odłóżmy $BD = BA$; wówczas musi być $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BDA = \frac{B}{2}$ (d l a c z e g o?)

Zauważmy dalej, że

$$\sphericalangle CAD = A + \frac{B}{2}$$

$$= A + 90^0 - \frac{A+C}{2}$$

$$= 90^0 + \frac{A-C}{2}.$$



Rys. 76a.

Stosując wzór sinusów do trójkąta CDA, mamy

$$\frac{a+c}{b} = \frac{\sin\left(90^0 + \frac{A-C}{2}\right)}{\sin\frac{B}{2}},$$

ze względu zaś na to, że

$$\frac{B}{2} = 90^0 - \frac{A+C}{2}$$

oraz, że $\quad \sin(90^0 + x) = \cos x \quad$ (d l a c z e g o?)

otrzymujemy ostatecznie

$$\frac{a+c}{b}=\frac{\cos\frac{A-C}{2}}{\cos\frac{A+C}{2}}. \qquad (1)$$

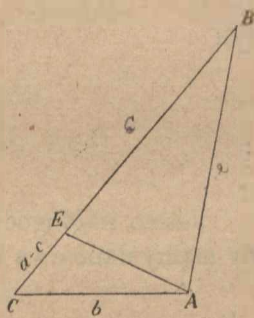
Jeżeli w trójkącie ABC odłożymy bok c na boku a, nie zaś na jego przedłużeniu (zakładając, że $a > c$), wówczas otrzymamy (rys. 77) trójkąt CEA, w którym

$$\sphericalangle CEA = 90^0 + \frac{B}{2} \quad \text{(dlaczego?)}$$

$$= 180^0 - \frac{A+C}{2};$$

$$\sphericalangle CAE = A - \left(90^0 - \frac{B}{2}\right)$$

$$= \frac{A-C}{2}.$$



Rys. 77.

Stosując wzór sinusów do trójkąta CEA, mamy

$$\frac{a-c}{b}=\frac{\sin(CAE)}{\sin(CEA)}$$

$$=\frac{\sin\frac{A-C}{2}}{\sin\left(180^0-\frac{A+C}{2}\right)},$$

czyli ostatecznie

$$\frac{a-c}{b}=\frac{\sin\frac{A-C}{2}}{\sin\frac{A+C}{2}}. \qquad (2)$$

Uczeń napisze odpowiednie wzory, w których skład wchodziłyby sinusy i kosinusy kątów

$$\frac{A-B}{2},\ \frac{A+B}{2},\ \frac{B-C}{2},\ \frac{B+C}{2}.$$

Uwaga. Wzory (1) i (2) odznaczają się tem, że każdy z nich zawiera wszystkie sześć elementów trójkąta. Wskutek tego nadają

się one doskonale do sprawdzania wyników, otrzymanych przy rozwiązywaniu trójkątów (dlaczego?)[1]).

Wzór tangensów.

§ **56**. Dzieląc przez siebie wzory Newtona, otrzymujemy

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}\cdot\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}},$$

czyli

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}.$$

Jestto najdogodniejszy wzór do rozwiązywania trójkątów, gdy mamy dane dwa boki i kąt między niemi zawarty.

Trzeci przypadek rozwiązywania trójkątów.

§ **57**. *Dane są a, b, C; rozwiązać trójkąt.*

Stosując wzór tangensów i pamiętając, że

$$\frac{A+B}{2}=90^0-\frac{C}{2},$$

a więc

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=\operatorname{ctg}\frac{C}{2},$$

mamy

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cdot\operatorname{ctg}\frac{C}{2}.$$

Obliczywszy zapomocą tablic kąt $\frac{A-B}{2}$ i znając kąt $\frac{A+B}{2}$, znajdujemy A i B.

---

[1]) Wzory te nazywają często wzorami Mollweidego od imienia matematyka niemieckiego, który na początku XIX wieku przypomniał je światu naukowemu. Nazwa jest niesłuszna, gdyż wzory te znajdujemy już w jednem z dzieł Newtona.

Bok c obliczyć możemy zapomocą wzoru sinusów.
Sprawdzamy rachunek zapomocą *wzoru Newtona*.

Przykład. *Rozwiązać trójkąt, mając dane* $A = 72^0 40'$, $b = 52{,}34$, $c = 86{,}75$.

DANE.	OBLICZONE.
$A = 72^0 40'$	$B = 35^0 04'$
$b = 52{,}34$	$C = 72^0 16'$
$c = 86{,}75$	$a = 86{,}95$

RACHUNKI POMOCNICZE.

$b + c = 139{,}09 \qquad c - b = 34{,}41$

$$\frac{A}{2} = 36^0 20'$$

$$\frac{B+C}{2} = 90^0 - \frac{A}{2} = 53^0 40'.$$

OBLICZENIE KĄTÓW B i C.

$$\operatorname{tg}\frac{C-B}{2} = \frac{c-b}{c+b} \cdot \operatorname{ctg}\frac{A}{2}$$

$c-b = 34{,}41$	$\lg(c-b) = 1{,}5367$
$c+b = 139{,}09$	$\operatorname{colg}(c+b) = \bar{3}{,}8567$
$\frac{A}{2} = 36^0 20'$	$\lg\operatorname{ctg}\frac{A}{2} = 0{,}1335$
	$\lg\operatorname{tg}\frac{C-B}{2} = \bar{1}{,}5269$
	$\frac{C-B}{2} = 18^0 36'$
	$\frac{C+B}{2} = 53^0 40'$
	$C = 72^0 16'$
	$B = 35^0 04'$

OBLICZENIE BOKU a.

$$a = \frac{c \cdot \sin A}{\sin C}$$

$c = 86{,}75$	$\lg c = 1{,}9383$
$A = 72^0 40'$	$\lg\sin A = \bar{1}{,}9798$
$C = 72^0 16'$	$\operatorname{colg}\sin C = 0{,}0211$
	$\lg a = 1{,}9392$
	$a = 86{,}95$

SPRAWDZENIE.

$$\frac{c-b}{a} = \frac{\sin\frac{C-B}{2}}{\sin\frac{C+B}{2}}$$

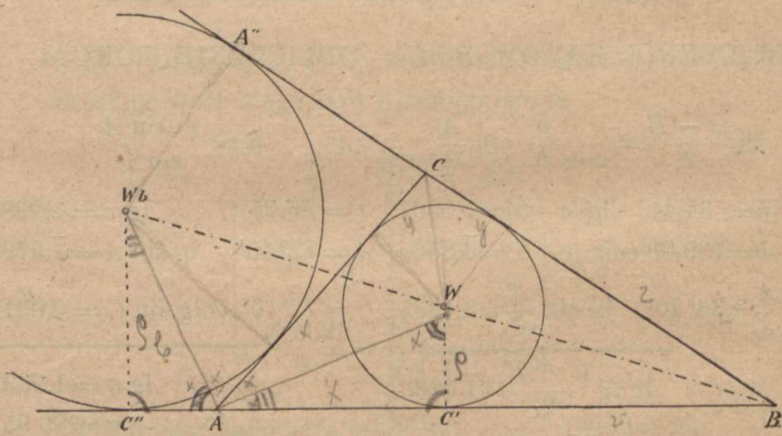
$$\lg(c-b) = 1{,}5367 \qquad \lg\sin\frac{C-B}{2} = \bar{1}{,}5037$$

$$\operatorname{colg} a = \bar{2}{,}0608 \qquad \operatorname{colg}\sin\frac{C+B}{2} = 0{,}0939$$

$$1{,}5975 \qquad \bar{1}{,}5976$$

Promień koła wpisanego i wzór Herona.

§ **58**. Niech W będzie środkiem koła, wpisanego w trójkąt ABC; W_a, W_b, W_c niech będą środkami kół zawpisanych, leżących odpowiednio w kątach A, B, C. Oznaczmy przez ρ promień koła wpisanego, przez ρ_a, ρ_b, ρ_c promienie kół zawpisanych. Wreszcie przez $2p$ oznaczmy obwód trójkąta ABC, przez S jego pole.



Rys. 78.

Jeżeli C' jest punktem styczności boku c z kołem wpisanem, C'' zaś punktem styczności przedłużenia tegoż boku z kołem zawpisanem (rys. 78), wówczas, jak wiadomo [1])

[1]) Uczeń, któryby tych wzorów nie znał, otrzyma pierwszy z nich

$$AC' = p - a,$$
$$BC'' = p,$$
$$AC'' = p - c.$$

Z rysunku 78 widzimy, że

$$\triangle\ WAC' \sim \triangle\ W_bAC'' \qquad \text{(dlaczego?)}$$

zatem

$$\frac{\rho}{p-a} = \frac{p-c}{\rho_b}$$

czyli

$$\rho\rho_b = (p-c)(p-a). \qquad (1)$$

Z podobieństwa trójkątów

$$\triangle\ BWC' \sim \triangle\ BW_bC''$$

wynika, że

$$\frac{\rho}{\rho_b} = \frac{p-b}{p} \qquad (2)$$

Z równań (1) i (2) wynika, że

$$\rho^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p},$$

czyli

$$\rho = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Ponieważ mamy (dlaczego?)

$$S = p . \rho \qquad (3)$$

zatem musi być

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Jestto t. zw. *wzór Herona na pole trójkąta.*

Rzecz prosta, że gdybyśmy, nie posługując się promieniami kół w trójkącie, wzór Herona otrzymali na innej drodze (jak to

---

z łatwością, układając trzy równania linjowe, w których niewiadomemi są odcinki, wyznaczone na bokach trójkąta przez koło wpisane.

Drugi wzór wynika z pierwszego, jeżeli zważymy, że

$$AC'' + CA'' = b \qquad \text{(dlaczego?)}$$

a więc

$$BA'' + BC'' = a + b + c.$$

często robią w kursach geometrji), wówczas z wzoru Herona i z równania (3) moglibyśmy odrazu otrzymać wzór na promień koła wpisanego.

Wzór połówkowy.

§ 59. Z rys. 78 widać odrazu, że

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{\rho}{p-a}.$$

Jestto t. zw. wzór połówkowy, który daje dogodny sposób rozwiązywania trójkąta, gdy znamy trzy jego boki.

Czwarty przypadek rozwiązywania trójkątów.

§ **60**. **Przykład**. *Rozwiązać trójkąt, mając dane* $a=4584$, $b=5140$, $c=3624$.

DANE.	OBLICZONE.
$a=4584$	$A=60^0\,10'$
$b=5140$	$B=76^0\,34'$
$c=3624$	$C=43^0\,16'$.

RACHUNKI POMOCNICZE.

$a+b+c=13348$ $\quad p=6674$

$p-a=2090$ $\quad p-b=1534$ $\quad p-c=3050.$

OBLICZENIE PROMIENIA ρ.

$$\rho=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

$p-a=2090$	$\lg(p-a)=3,3201$
$p-b=1534$	$\lg(p-b)=3,1858$
$p-c=3050$	$\lg(p-c)=3,4843$
$p=6674$	$\operatorname{colg} p=\bar{4},1757$
	$\lg\rho^2=6,1659$
	$\lg\rho=3,0829$

OBLICZENIE KĄTA A.

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{\rho}{p-a}$$

$$\lg\rho = 3{,}0829$$
$$\operatorname{colg}(p-a) = \bar{4}{,}6799$$
$$\lg\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \bar{1}{,}7628$$
$$\frac{A}{2} = 30^0\,05'$$
$$A = 60^0\,10'$$

OBLICZENIE KĄTA B.

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{\rho}{p-b}$$

$$\lg\rho = 3{,}0829$$
$$\operatorname{colg}(p-b) = \bar{4}{,}8142$$
$$\lg\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \bar{1}{,}8971$$
$$\frac{B}{2} = 38^0\,17'$$
$$B = 76^0\,34'$$

OBLICZENIE KĄTA C.

$$\lg\rho = 3{,}0829$$
$$\operatorname{colg}(p-c) = \bar{4}{,}5157$$
$$\lg\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \bar{1}{,}5986$$
$$\frac{C}{2} = 21^0\,38'$$
$$C = 43^0\,16'.$$

SPRAWDZENIE.

$$A + B + C = 180^0.$$

Powyższe rachunki dadzą się ułożyć w sposób zwięźlejszy, jeżeli zwrócimy uwagę na to, że logarytmy lub kologarytmy pewnych liczb powtarzają się przy obliczaniu poszczególnych elementów. Schemat rachunku mógłby być np. następujący:

	ρ	A	B	C
$p-a=2090$	$\lg(p-a)=3{,}3201$	$\operatorname{colg}(p-a)=\bar{4}{,}6799$		
$p-b=1524$	$\lg(p-b)=3{,}1858$		$\operatorname{colg}(p-b)=\bar{4}{,}8142$	
$p-c=3050$	$\lg(p-c)=3{,}4843$			$\operatorname{colg}(p-a)=\bar{4}{,}5157$
$p=6674$	$\operatorname{colg} p=\bar{4}{,}1757$			
	$\lg\rho^2=6{,}1659$			
	$\lg\rho=3{,}0829$	$\lg\rho=3{,}0829$	$\lg\rho=\ .0829$	$\lg\rho=3{,}0829$
		$\lg\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\bar{1}{,}7628$	$\lg\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\bar{1}{,}8971$	$\lg\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\bar{1}{,}5986$
		$\frac{A}{2}=30^0 05'$	$\frac{B}{2}=38^0 17'$	$\frac{C}{2}=21^0 38'$
		$A=60^0 10'$	$B=76^0 34'$	$C=43^0 16'$

SPRAWDZENIE: $A+B+C=180^0$.

Wyższość praktyczna drugiego schematu jest oczywista.

Ćwiczenia XVII. 1. Wyrazić promienie kół zawpisanych jako funkcje boków trójkąta.

2. Wyrazić sin A jako funkcję trzech boków trójkąta.

Dlaczego otrzymany wzór jest mniej dogodny od wzoru połówkowego, jeśli chodzi o czwarty przypadek rozwiązywania trójkątów?

3. Zbadać, czy prawdziwe są wzory następujące:

(I) $\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\rho_a}+\frac{1}{\rho_b}+\frac{1}{\rho_c}$; (II) $\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_a}=\frac{2}{h_a}$;

(III) $\rho_a+\rho_b+\rho_c-\rho=4R$; (IV) $S=\sqrt{\rho\rho_a\rho_b\rho_c}$;

(V) $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\rho\rho_a}{\rho_b\rho_c}}$; (VI) $\rho=\frac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$;

(VII) $\rho=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$; (VIII) $\rho\rho_c+\rho_a\rho_b=ab$;

(XI) $\rho_a\rho_b+\rho_b\rho_c+\rho_c\rho_a=p^2$; (X) $\rho_a(\rho_b+\rho_c)=ap$.

4. Wyrazić pole trójkąta w zależności od promienia ρ_a i odcinka $p-a$.

5. Stosunek pola trójkąta do pola koła wpisanego równa się stosunkowi obwodów tych figur.

6. Obliczyć odległość między środkiem W a środkami W_a, W_b, W_c.

7. Obliczyć pole i boki trójkąta $W_a W_b W_c$.

8. Rozwiązać następujące trójkąty:

α)	$a=8,35$	$b=19,17$	$C=68^\circ15'$
β)	$b=27,02$	$c=35,19$	$A=105^\circ17'$
γ)	$c=48,33$	$a=57,14$	$B=19^\circ23'$
δ)	$a=108,9$	$c=66,17$	$B=80^\circ04'$
ε)	$b=74,18$	$c=92,06$	$A=78^\circ35'$.

9. Rowiązać następujące trójkąty:

α)	$a=19,25$	$b=22,13$	$c=35,27$
β)	$a=94,15$	$b=66,22$	$c=102,6$
γ)	$a=8,452$	$b=12,07$	$c=15,32$
δ)	$a=29,31$	$b=42,07$	$c=58,62$
ε)	$a=38,5$	$b=56,04$	$c=69,41$

10. Oznaczając przez a, b, c, d kolejne boki czworoboku wpisanego w koło, wykazać, że pole jego równa się

$$\frac{ad+bc}{2}\cdot\sin A$$

11. Wyrażając w dwojaki sposób długość przekątnej czworoboku wpisanego, znaleźć wzór na cos A, a stąd otrzymać wzór na sin A, wreszcie wykazać, że pole czworoboku daję się wyrazić wzorem

$$\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

12. W jaki sposób z wzoru poprzedniego zadania otrzymać można wzór Herona?

13. Trójkąt jest równoramienny, jeżeli mamy

$$(p - b) \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = p \operatorname{tg} \frac{B}{2}.$$

14. Rozwiązać trójkąt, mając dane:

α)	$S = 4700$	$\rho = 21{,}94$	$A = 27^0 36'$
β)	$S = 3540$	$\rho_a = 18{,}25$	$A = 43^0 12'$
γ)	$S = 987{,}5$	$h_a = 42{,}30$	$h_b = 38{,}42$
δ)	$S = 6033$	$a = 90{,}8$	$\sphericalangle (a, s_b) = 43^0 42'$
ε)	$S = 4{,}625$	$h_a = 2{,}48$	$\sphericalangle (a, s_b) = 25^0 11'$
ζ)	$S = 527{,}6$	$a = 38{,}45$	$s_b = 19{,}3$
η)	$S = 29{,}35$	$a + b = 16{,}42$	$C = 70^0 38'$
θ)	$S = 108{,}9$	$a = 25{,}34$	$b + c = 33{,}45.$

15. Zbudować i rozwiązać trójkąty, w których mamy dane:

α) a, h_a, A
β) a, h_b, ρ
γ) $a, b + c, h_a$
δ) $a, h_a, \sphericalangle (b, s_a)$.

16. Cyrkiel, którego nóżki (licząc od osi obrotu) mają po 14,5 cm. zaopatrzony jest w ołównik, osadzony na zawiasie. Długość ołównika równa się 6,5 cm. Chcąc wykreślić koło promieniem 11 cm., ustawiamy ołównik prostopadle do papieru. Jak wielki kąt tworzy ołównik z dalszym ciągiem nóżki, do której jest przytwierdzony, i jak wielki jest kąt między nóżkami cyrkla?

17. Sternik skierowuje łódź pod kątem $108^0 24'$ względem kierunku prądu rzeki. Łódź płynie z prędkością $1{,}25 \frac{m}{s}$, prędkość prądu wynosi $0{,}74 \frac{m}{s}$ aka jest prędkość własna łodzi (prędkość w wodzie stojącej)?

18. Prędkość prądu w rzece równa się $0{,}85 \frac{m}{s}$, prędkość własna łodzi $1{,}82 \frac{m}{s}$. Pod jakim kątem względem kierunku prądu należy skierować łódź, żeby mogła ona płynąć z prędkością $2{,}12 \frac{m}{s}$.?

19. Wioślarz przeprawia się przez rzekę, mającą 315 m. szerokości. Prędkość łodzi w wodzie stojącej równa się $1{,}05 \frac{m}{s}$. Pod jakim kątem względem kierunku prądu sternik skierowuje łódź, 1) jeżeli łódź płynie po prostej, tworzącej z kierunkiem prądu kąt 53^0, a prędkość prądu równa się $1{,}42 \frac{m}{s}$? 2) jeżeli po upływie 6 minut łódź dotarła do przeciwnego brzegu w punkcie leżącym o 280 m. poniżej punktu, z którego wyruszyła?

20. Ciężki pręt OA zwisa pionowo, osadzony na zawiasie w punkcie O. Do poziomego pręta OB przytwierdzony jest w punkcie B bloczek, przez ktory przerzuciliśmy sznurek BA. Obciążyliśmy sznur ciężarem C, wsku-

tek czego pręt OA obrócił się tak, że ciężarek opuścił się o 9 cm. O jaki kąt obrócił się pręt OA, jeżeli $OA = 24$ cm., $AB = 30$ cm.?

21. Człowiek, którego wzrost = 1,72 m., znajduje się w odległości 4,52 m. od słupa, którego wysokość = 9,38 m. Pod jakim kątem człowiek ten widzi słup?

22. Boki trójkąta równają się

$$a = 47{,}5 \text{ cm.},\ b = 103{,}6 \text{ cm.},\ c = 121{,}7 \text{ cm.}$$

Obliczyć odległość wierzchołka C od środka kwadratu, zbudowanego na boku c.

23. Wysokość DA ostrosłupa przechodzi przez wierzchołek A jego podstawy. Podstawa ta ma kształt trójkąta, w którym $A = 80^0 20'$, $b = 58{,}12$ cm., $c = 34{,}17$. Obliczyć kąt $\sphericalangle BDC$, jeżeli $DA = 15$ cm.?

24. W czworoboku $ABCD$ mamy $AB = AD = 42$ cm., $BC = 32{,}5$ cm., $CD = 55$ cm., $\sphericalangle DAB = 120^0$. W środku O przekątnej BD wystawiamy prostopadłą do płaszczyzny czworoboku i odkładamy na niej odcinek $OK = 18$ cm. Obliczyć: 1) objętość ostrosłupa $KABCD$; 2) kąt między krawędzią KA i podstawą; 3) kąty między podstawą a ścianami DKA, BKA; 4) kąt dwuścienny między temi dwiema ścianami.

25. Obliczyć objętość graniastosłupa o podstawie czworokątnej, mając dane boki a, b, c, d podstawy, kąt A tej podstawy, krawędź boczną l i kąt φ, pod którym krawędź ta jest nachylona do podstawy.

Zastosowanie: $a = 10$, $b = 11$, $c = 12$, $d = 7$, $l = 39$, $A = 60^0 29'$ $\varphi = 30^0 04'$

26. W ostrosłupie o podstawie trójkątnej mamy dane: krawędź boczną $KA = l$, krawędzie podstawy $AC = b$, $AB = c$, kąty $\sphericalangle BAC = A$, $\sphericalangle KAB = \alpha$, $\sphericalangle KAC = \beta$. Obliczyć: 1) objętość ostrosłupa; 2) kąt dwuścienny o krawędzi KA.

27. Środek ściany sześcianu, którego krawędź $= a$, połączono z wierzchołkami przeciwległej ściany. Obliczyć kąty płaskie na ścianach powstałego ostrosłupa oraz jego dwuściany.

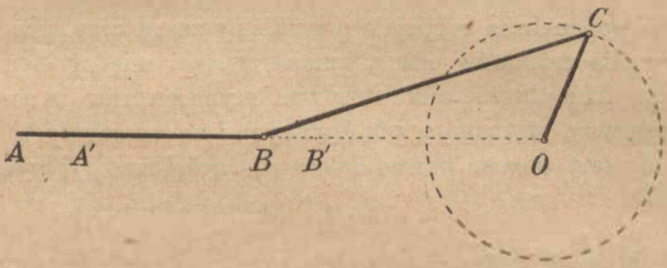
28. W ostrosłupie trójkątnym ściana KAB jest prostopadłą do podstawy ABC. Mając dane krawędzie podstawy a, b, c oraz kąty $\sphericalangle KAB = \alpha$, $\sphericalangle KBA = \beta$, obliczyć: 1) objętość ostrosłupa, 2) krawędzie boczne, 3) pole powierzchni bocznej.

29. Ostrosłup, o którym mowa w poprzedniem zadaniu, przecięto płaszczyzną, przesuniętą przez krawędź AB i nachyloną do podstawy pod kątem φ. Obliczyć pole przekroju.

30. Opierając się na wzorach Newtona, rozwiązać następujące zagadnienie: w trójkącie ABC bok a i kąt A są stałe, boki zaś b i c są zmienne; jaki związek powinien zachodzić między kątami B i C, żeby obwód trójkąta był możliwie największy?

31. Trójkąt ma stałą podstawę a i stały obwód $2p$, długości zaś boków b i c są zmienne. Zbadać: 1) kiedy kąt A jest największy? 2) jak zmieniają się promienie ρ i ρ_a; w szczególności — kiedy są największe?, 3) jak zmieniają się promienie ρ_b i ρ_c?

32. W wielu najpospolitszych maszynach spotykamy mechanizm przegubowy, przedstawiony na rys. 79. Składa się on z pręta AB, który porusza się w prawo i w lewo po prostej AO, z pręta OC, który obraca się



Rys. 79.

dokoła O, i z pręta BC, połączonego zawiasami w punktach B i C z pierwszemi dwoma prętami. Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\sphericalangle CBO = \alpha,\ \sphericalangle COB = \varphi,\ BC = l,\ OC = r,\ AB = a.$$

(1) W jakich granicach zmienia się α?

(2) Na pręt AB działa siła p dyn, skierowana od B do O. Obliczyć siłę p', która działa na pręt BC, i zbadać jej zmiany w zależności od zmian kąta α.

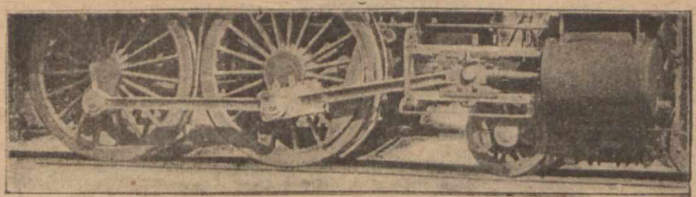
(3) Obliczyć tę składową siły p', która wywołuje ruch obrotowy pręta OC, i zbadać jej zmiany, wyrażając ją jako funkcję siły p i kata α.

(4) Kładąc $p =$ ciężarowi 100 kg, $\alpha = 10^0, 30^0, 50^0, 60^0, 90^0$, obliczyć p' oraz tę jej składową, która obraca pręt OC, i naszkicować obrazy tych funkcyj.

(5) Kładąc $r = 1$, $l = 3$, $BO = 3{,}2$, obliczyć kąty α i φ.

(6) Kładąc $r = 1$, $l = 3$, obliczyć wartość kąta φ przy kilku różnych położeniach punktu B i naszkicować krzywą, wyobrażającą zmiany kąta φ w zależności od przesunięcia pręta AB.

(7) Wskazać podobny mechanizm w parowozie i wyjaśnić, w jaki sposób ruch obrotowy przedniej pary dużych kół parowozu przenosi się na tylną parę dużych kół.



Rys. 80

ROZDZIAŁ IV.

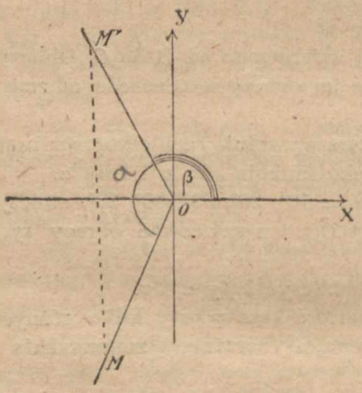
O funkcjach sum i różnic kątów.

W poprzednim rozdziale poznaliśmy zasadnicze sposoby rozwiązywania trójkątów oraz rozmaite związki między elementami trójkąta. Aby ułatwić sobie stosowanie tych wzorów do zagadnień trudniejszych, wymagających dłuższych i nieraz zawiłych rachunków, musimy poznać pewne dalsze własności funkcyj trygonometrycznych.

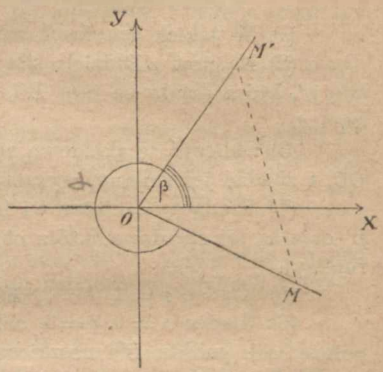
Sinus i kosinus sumy lub różnicy dwóch kątów.

§ **60**. Niech będą dane dwa jakiekolwiek kąty $XOM = \alpha$, $XOM' = \beta$. Na drugich ramionach tych kątów obierzmy punkty M, M' tak, żeby było

$$OM = OM' = d \tag{1}$$



Rys. 81.



Rys. 82.

Jeżeli połączymy M z M', otrzymamy trójkąt równoramienny MOM', w którym mamy zawsze

albo $$\sphericalangle MOM' = \alpha - \beta$$

albo też $$\sphericalangle MOM' = 360^0 - (\alpha - \beta),$$

a zarówno w jednym, jak w drugim przypadku mamy

$$\cos(MOM') = \cos(\alpha - \beta) \tag{2}$$

Niech x, y będą spółrzędnemi punktu M, zaś x', y' spółrzędnemi punktu M'. Wówczas przedewszystkiem, na zasadzie ćwiczenia I, 4, str. 6, mamy

$$MM'^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 \tag{3}$$

Prócz tego uczeń dowiedzie sam, że musi być

$$\left.\begin{aligned} OM^2 &= x^2 + y^2 \\ OM'^2 &= x'^2 + y'^2 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Stosując do trójkąta MOM' wzór kosinusów, mamy

$$MM'^2 = OM^2 + OM'^2 - 2OM\,.\,OM'\,.\cos(MOM'),$$

skąd

$$\cos(MOM') = \frac{OM^2 + OM'^2 - MM'^2}{2\,OM\,.\,OM'}.$$

Podstawiając do tego wzoru wartości, wynikające z wzorów (1), (2), (3) i (4), otrzymujemy

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 - (x - x')^2 - (y - y')^2}{2d^2}$$

$$= \frac{2\,(xx' + yy')}{2d^2}$$

$$= \frac{x}{d}\cdot\frac{x'}{d} + \frac{y}{d}\cdot\frac{y'}{d}$$

$$= \cos\alpha\,.\cos\beta + \sin\alpha\,.\sin\beta.$$

Wzoru tego dowiedliśmy w sposób zupełnie ogólny, tak iż stosuje się on do kątów dowolnej wielkości. Skorzystamy z tego, aby go przekształcić i otrzymać inne, analogiczne wzory.

Mamy prawo do wzoru

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \qquad \text{(I)}$$

wstawić $-\beta$ zamiast β (ze względu na to, że wzór nasz jest prawdziwy również dla kątów ujemnych); otrzymamy

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\,.\cos(-\beta) + \sin\alpha\,.\sin(-\beta)$$

$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad \text{(II)}$$

Jeżeli we wzorze (I) zastąpimy kąt α przez kąt $90^0 - \alpha$, otrzymamy

$$\cos[(90^0 - \alpha) - \beta] = \cos(90^0 - \alpha)\cos\beta + \sin(90^0 - \alpha)\sin\beta,$$

a ponieważ

$$\cos[(90^0 - \alpha) - \beta] = \cos[90^0 - (\alpha + \beta)]$$

$$= \sin(\alpha + \beta),$$

zatem

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \qquad \text{(III)}$$

Wzór (III) jest zupełnie ogólny, t. j. kąty α i β mogą w nim przybierać wartości dowolne, zatem mamy prawo zastąpić w nim kąt β przez kąt $-\beta$. Uczyniwszy to, otrzymujemy

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta)$$

$$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \qquad \text{(IV)}$$

Otrzymaliśmy więc cztery następując wzory

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

Tangens sumy lub różnicy dwóch kątów.

§ **62**. Z poprzednich wzorów wynika odrazu, że

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Istotnie,

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.$$

Dzieląc licznik i mianownik przez $\cos\alpha\cos\beta$, otrzymujemy wzór w postaci powyżej wskazanej.

Postępując analogicznie, uczeń dowiedzie sam, że

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$ [1]

Funkcje kąta podwojonego.

§ **63**. Jeżeli we wzorach na $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ położymy $\alpha=\beta$, otrzymamy następujące wzory:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

---

[1]) Rachunek, zapomocą którego otrzymaliśmy wzory na *tg* $(\alpha\pm\beta)$, nie da się zastosować, jeżeli którykolwiek z czterech kątów α, β, $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$ ma kształt $n.\ 180^0+90^0$, gdyż kosinus takiego kąta jest zerem, a więc musielibyśmy dzielić przez zero. W tych jednak przypadkach żądane wartości tangensów otrzymać można o wiele łatwiej na podstawie wzorów redukcyjnych. Jeżeli np. $\alpha=90^0$, mamy odrazu $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\operatorname{tg}(90^0+\beta)=-\operatorname{ctg}\beta$.

Ćwiczenia XVIII. 1. Mając dane, że $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $\sin\beta = \frac{1}{4}$, obliczyć $\sin(\alpha+\beta)$ i $\cos(\alpha+\beta)$.

2. Jeżeli kąty α i β są ostre, przyczem $\cos\alpha = \frac{1}{7}$, $\cos\beta = \frac{13}{14}$ wówczas $\alpha - \beta = 60^0$.

3. Jeżeli α, β są kątami ostremi, przyczem $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$, wówczas $\alpha + \beta = 45^0$.

4. Dowieść, że

$$\sin(30^0 + A) + \sin(30^0 - A) = \cos A$$
$$\cos(30^0 - A) - \cos(30^0 + A) = \sin A$$

5. Dowieść, że $\operatorname{tg}(45^0 + A) - \operatorname{tg}(45^0 - A) = 2\operatorname{tg} 2A$

6. Dowieść, że

$$\text{(I)}\quad \cos A + \cos(120^0 + A) + \cos(120^0 - A) = 0$$
$$\text{(II)}\quad \sin A + \sin(120^0 + A) - \sin(120^0 - A) = 0.$$

7. Jeżeli $\alpha + \beta = 60^0$, wówczas

$$\sin(120^0 - \alpha) = \sin(120^0 - \beta).$$

8. Dowieść, że

$$\text{(I)}\quad \frac{\sin(A+B) + \sin(A-B)}{\cos(A+B) + \cos(A-B)} = \operatorname{tg} A$$

$$\text{(II)}\quad \frac{\sin(A+B) - \sin(A-B)}{\cos(A+B) - \cos(A-B)} = -\operatorname{ctg} A.$$

9. Dowieść, że

$$\frac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B} + \frac{\sin(B-C)}{\cos B\cos C} + \frac{\sin(C-A)}{\cos C\cos A} = 0.$$

10. Dowieść, że

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$
$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$
$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

11. Wyrazić $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$ zapomocą $\operatorname{ctg}\alpha$ i $\operatorname{ctg}\beta$.

12. Sprawdzić następujące równości:

(I) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$

(II) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$

(III) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{2}{\sin 2\alpha}$

(IV) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{ctg} 2\alpha$

(V) $\dfrac{\sin\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$

(VI) $\dfrac{1 - \cos 2\beta}{1 + \cos 2\beta} = \operatorname{tg}^2\beta$

(VII) $\dfrac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg} 2\beta - \operatorname{tg}\beta} = \cos 2\beta$

(VIII) $\dfrac{\operatorname{ctg}\varphi}{\operatorname{tg} 2\varphi + \operatorname{ctg}\varphi} = \cos 2\varphi$

(IX) $\sin\varphi = \dfrac{\sin 2\varphi\cos\varphi}{1 + \cos 2\varphi}$

(XI) $\sin 2\alpha(\operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{tg}\alpha) = 1$

(X) $\cos 2\alpha(1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg} 2\alpha) = 1$

(XII) $\cos(135^0 + \alpha) + \sin(135^0 - \alpha) = 0.$

13. Zbadać, czy prawdziwe są następujące tożsamości:

(I) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$

(II) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$
$=\cos^2\beta-\sin^2\alpha$

(III) $\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)=\cos\beta$

(IV) $\cos\beta\sin(\alpha-\beta)+\sin\beta\cos(\alpha-\beta)=\sin\alpha$

(V) $\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)=(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\beta+\sin\beta)$

(VI) $\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta)=(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos-\sin\beta)$

14 Jeżeli kąty ostre α, β są oba mniejsze albo oba większe od 45^0, wówczas

$$\cos(\alpha-\beta)>\sin(\alpha+\beta).$$

15. Jeżeli $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

to
$$\alpha-\beta=45^0.$$

16. Jeżeli $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{5}$, $\operatorname{tg}\gamma=\frac{1}{8}$,

to
$$\alpha+\beta+\gamma=45^0.$$

Tożsamości, z któremi dotąd mieliśmy do czynienia czy to w algebrze, czy w trygonometrji, były to równości, w których mogliśmy nadawać zmiennym wszelkie możliwe wartości. Fakt ten dowodzi, że pomiędzy wielkościami zmiennemi, wchodzącemi w skład takich tożsamości, niema absolutnie żadnej zależności. Tożsamości te nazywamy *bezwzględnemi*. Takiemi są np. równości

$$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

W pierwszej tożsamości zmienne x, y, w drugiej zmienne α, β są od siebie niezależne: jeżeli na α obraliśmy jakąś wartość, nie straciliśmy przez to prawa rozporządzania się dowolnie kątem β; przeciwnie—możemy nadać zmiennej β dowolną wartość, a jednak równość nasza sprawdzi się zawsze.

Istnieją jednak również *tożsamości warunkowe*, które sprawdzają się o tyle tylko, o ile zmienne spełniają pewien jakiś warunek, a więc nie są całkowicie od siebie niezależne. Chcąc dowieść takiej tożsamości, musimy na podstawie tego warunku wyrugować jedną lub więcej zmiennych, a wtedy powinniśmy otrzymać tożsamość bezwzględną pomiędzy pozostałemi zmiennemi.

Przykład. *Jeżeli* $A+B+C=180^0$, *wówczas zachodzi tożsamość*

$$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\,.\operatorname{tg}B\,.\operatorname{tg}C.$$

Łatwo jest przekonać się, że tożsamość ta nie jest bezwzględna. Wystarczy np. założyć, że $A=B=180^0$, $C=45^0$, aby prze-

konać się, że równość nie sprawdza się. Natomiast równie łatwo możemy dowieść jej prawdziwości przy postawionym warunku.

Istotnie, mamy

$$A = 180^0 - (B + C)$$

czyli

$$\operatorname{tg} A = -\operatorname{tg}(B + C)$$

Pamiętając, że dowiedliśmy tożsamości bezwzględnej

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta},$$

możemy napisać

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C &= \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C - \operatorname{tg}(B + C) \\ &= \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C - \frac{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}{1 - \operatorname{tg} B . \operatorname{tg} C} \\ &= \frac{-\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C (\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)}{1 - \operatorname{tg} B . \operatorname{tg} C} \\ &= -\operatorname{tg} B . \operatorname{tg} C . \frac{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}{1 - \operatorname{tg} B . \operatorname{tg} C} \\ &= -\operatorname{tg} B . \operatorname{tg} C . \operatorname{tg}(B + C) \\ &= \operatorname{tg} A . \operatorname{tg} B . \operatorname{tg} C. \end{aligned}$$

Sprawdzić trzy następujące tożsamości warunkowe, w których A, B, C oznaczają kąty trójkąta.

17. $\operatorname{ctg} A . \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} B . \operatorname{ctg} C + \operatorname{ctg} C . \operatorname{ctg} A = 1.$

18. $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C = 1.$

19. $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C - \dfrac{1}{\sin A \sin B \sin C} = \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C.$

20. Jeżeli mamy $A + B + C = 90^\circ$ lub $A + B + C = 270^0$, to

$$\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} C \operatorname{tg} A = 1.$$

---

21. Jeżeli w trójkącie mamy

$$\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B},$$

wówczas trójkąt jest równoramienny.

22. Doprowadzić do postaci logarytmicznej (t. j. nadającej się do rachunku logarytmicznego) sumę $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$ oraz różnicę $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta$.

23. Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku a. Przez wierzchołek A prowadzimy prostą, która przecina boki BC, CD lub ich przedłużenia odpowiednio w punktach N, M. Jak zmienia się iloczyn $AM . AN$, gdy prosta, obracając się dokoła A, wykonywa obrót zupełny?

24. W trójkącie równoramiennym ABC ($AB = AC$) ze środka boku BC zakreślono koło, styczne do dwu drugich boków trójkąta. Wyrazić pole i boki trójkąta w zależności od promienia r tego koła i od kąta A. Zbadać jak zmieniają się te trzy wielkości, gdy przy stałym promieniu zmienia się kąt A.

25. Ze szczytu góry A obserwujemy szczyt B góry, leżącej na drugim brzegu jeziora. Kąt wzniesienia szczytu B równa się α, kąt depresji obrazu tego szczytu, odbitego w jeziorze, równa się β. Obliczyć wysokość obu gór, znając odległość d między ich szczytami.

Zastosowanie: $d = 580$ m., $\alpha = 15^0 10'$, $\beta = 38^0$.

26. Dwa kominy fabryczne PA i QB są jednakowej wysokości. W punkcie M, leżącym na prostej PQ, wzniesienie pierwszego komina równa się α; w punkcie N, leżącym na prostej $MN \perp PQ$, wzniesienie pierwszego komina równa się β, wzniesienie drugiego komina równa się γ. Obliczyć wysokość obu kominów i odległość między niemi w zależności od α, β, γ i odcinka $MN = d$, jeżeli punkty P, Q, N leżą na jednej płaszczyźnie i jeżeli wzrost obserwatora $= l$.

Zastosowanie: $d = 30{,}6$ m., $\alpha = 58^0 49'$, $\beta = 45^0$, $\gamma = 30^0 02'$, $l = 1{,}65$ m.

27. Ze szczytu wieży spostrzegamy, że odległość d tej wieży od brzegu rzeki oraz szerokość x rzeki widzimy pod tym samym kątem. Znając wysokość h wieży, obliczyć szerokość rzeki.

28. Na szczycie wieży zatknięto sztandar. Znając wysokość h wieży i długość l drzewca sztandaru, obliczyć odległość od podnóża wieży do punktu A, z którego widać wieżę i sztandar pod równemi kątami. Zakładamy, że A leży na płaszczyźnie poziomej, przechodzącej przez podnóże wieży.

29. Stojąc w odległości 130 m. od wieży, zmierzono kąt wzniesienia jej wierzchołka. Drugi pomiar, dokonany w odległości 30 m. od wieży, dał kąt wzniesienia dwa razy większy. Notatka, zawierająca dokładne wartości kątów, została zgubiona; czy można mimo to obliczyć wysokość wieży?

30. Prostokątny arkusz papieru przełamano wzdłuż przekątnej i złożono we dwoje. Trójkąty, na które prostokąt został podzielony, częściowo nakrywają się. Należy: 1) w zależności od mniejszego boku a prostokąta i kąta φ między tym bokiem a przekątną wyrazić pole figury spólnej obu trójkątom; 2) zbadać, jak zmienia się to pole, gdy przy stałym boku a zmieniamy długość drugiego boku prostokąta.

31. Przez punkt M o spółrzędnych (a, a) poprowadzono prostą, która przecina osie OX, OY odpowiednio w punktach N, P. Wyrazić pole trójkąta NOP w zależności od kąta $\sphericalangle XNP = \alpha$ i zbadać zmiany pola, gdy prostą NP obracamy dokoła M.

32. Dany jest prostokąt $OABC$. Przez O prowadzimy dwie proste, z których jedna przecina bok AB w punkcie A', druga — bok BC w punkcie B', przyczem $\sphericalangle AOA' = \sphericalangle COB'$. Jak wielki jest kąt $\sphericalangle AOA'$, jeżeli

$$\triangle A'OB' = \triangle OB'C + \triangle OAA'?$$

33. W poprzedniem zadaniu zbadać zmiany pola $\triangle A'B'B$ w zależności od kąta $\sphericalangle AOA'$.

34. Dane są trzy kąty α, β, γ takie, że

$$\operatorname{tg} \alpha = 1, \qquad \operatorname{tg} \beta = 2 \qquad \operatorname{tg} \gamma = 3.$$

(1) Czy może istnieć trójkąt ABC, którego kąty równałyby się odpowiednio kątom α, β, γ?

(2) Obliczyć, w jakim stosunku ortocentr trójkąta ABC dzieli poszczególne jego wysokości.

(3) Wykazać, że prosta, łącząca ten ortocentr ze środkiem ciężkości trójkąta ABC, jest równoległa do boku AC.

35. Na jednem ramieniu kąta prostego odkładamy odcinek $OA = a$' na drugiem ramieniu — odcinki $OB = a$, $OB' = 2a$, $OB'' = 3a$. Obliczyć sumę kątów $\sphericalangle ABO + \sphericalangle AB'O + \sphericalangle AB''O$.

36. W trójkącie ABC zachodzi związek

$$\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg} B}{2} = \frac{\operatorname{tg} C}{3}.$$

Jaki jest stosunek boków trójkąta?

37. Mając dane, że

$$\sin x = \frac{a-b}{a+b},$$

obliczyć

$$\operatorname{tg}^2\left(45^0 - \frac{x}{2}\right).$$

38. Mając dane w trójkącie: kąt A oraz związek $\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = 2$, obliczyć kąty B i C oraz podać warunek możliwości zadania.

39. Obliczyć kąty trójkąta ABC, mając dane, że $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B = m$, $\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = p$.

40. Dany jest odcinek AB i na nim punkt C. W punkcie C wystawiamy prostopadłą i na niej obieramy ruchomy punkt M. Wyrazić kąt $\sphericalangle AMB$ w zależności od odcinków $AC = a$, $CB = b$, $MC = x$ i zbadać, w jaki sposób zmienia się kąt ten, gdy M kreśli całą prostopadłą.

41. Rozwiązać poprzednie zadanie w przypuszczeniu, że punkt C leży na przedłużeniu odcinka AB.

42. Dany jest kąt prosty $\sphericalangle ACB$ i stałe punkty A i B na jego ramionach. Przez C prowadzimy prostą, z punktów zaś A i B kreślimy odcinki AD, BE, prostopadłe do tej prostej. Jak zmienia się suma pól trójkątów $\triangle CBE$ i $\triangle CAD$, gdy prosta obraca się dokoła punktu C?

43. Na prostej odkładamy nieograniczony ciąg odcinków równych

$$OA_1 = A_1 A_2 = A_2 A_3 = \ldots\ldots$$

W punkcie O wystawiamy prostopadłą i na niej obieramy dowolny punkt X. Wiedząc, że $\operatorname{tg}(OXA_1) = p$, obliczyć tangensy kątów, pod któremi z punktu X widać odcinki $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, ... $A_{n-1} A_n$.

44. Dowieść, że (I) $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$; (II) $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$.

45. W trójkącie ABC, w którym $C = 90^0$, mamy

$$d^2_a : b^2 = \frac{2c}{c+b}.$$

46. W kole $(O)r$ dane są dwie prostopadłe średnice XOX', YOY' oraz ruchoma styczna, która przecina OX w punkcie A, OY zaś w punkcie B. Kreślimy $BM \parallel OX$, $AM \parallel OY$, budujemy prostą symetryczną z OX względem OM i na niej odkładamy $OK = OM$. Wykazać, że miejscem geometrycznem punktu K są dwie proste, równoległe do OX. [$\sphericalangle MOX = \alpha$].

47. Jeżeli w $\triangle ABC$ mamy $C = 2A$, to rzut boku a na dwusieczną wewnętrzną kąta C równa się $\frac{1}{2}c$.

48. Jeżeli w trójkątach ABC, $A'B'C'$ kąty są związane równaniami

$$B + B' = 90^0, \qquad C + C' = 90^0,$$

wówczas między bokami istnieje związek

$$b^2a'^2 + a^2b'^2 = (bc' + b'c)^2.$$

49. W $\triangle ABC$ mamy $a = b\sqrt{2}$; dowieść, że musi być

$$\cos^2 A = \cos 2B.$$

50. Jeżeli w trójkącie ABC mamy $A = 2B$, wówczas musi być $a^2 = b^2 + bc$.

Czy twierdzenie odwrotne jest prawdziwe?

51. Jeżeli w $\triangle ABC$ mamy $A = 3B$, to $(a - b)^2(a + b) = bc^2$.

Czy twierdzenie odwrotne jest prawdziwe?

52. Zwierciadło wklęsłe ma kształt półkuli o średnicy AB. Promień światła, wychodząc z A, tworzy ze średnicą AB kąt γ. Promień ten odbija się w punkcie C i po odbiciu przecina w punkcie D średnicę AB. Obliczyć długość odcinka AD, jeżeli wiadomo, że promienie padający i odbity tworzą równe kąty z promieniem kuli, poprowadzonym do punktu O.

53. Jeżeli w $\triangle ABC$ mamy $C = 90^0$, wówczas musi być

$$\cos(2A - B) = \frac{a}{c^3}(3c^2 - 4a^2).$$

54. Rozwiązać trójkąt ABC, w którym mamy dany obwód $2p$, jeżeli prócz tego wiemy, że kąty jego tworzą postęp arytmetyczny i że

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}.$$

55. W trójkącie ABC mamy

$$\text{(I)} \qquad \rho = 4R \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{\rho}{R} = \cos A + \cos B + C - 1.$$

56. Jeżeli przez Σ_1 oznaczymy sumę odległości ortocentru trójkąta od jego wierzchołków, przez Σ_2 sumę odległości środka koła opisanego od boków, wówczas mamy $\Sigma_1 + \Sigma_2 = R + \rho$.

57. W trójkącie równoramiennym oznaczmy kąt przy wierzchołku przez 6φ. Kąt ten został podzielony na trzy równe części. Jaki jest stosunek odcinków, które trójsieczne wyznaczają na podstawie trójkąta? Jak zmienia się ten stosunek, gdy 6φ zmienia się od 0^0 do 180^0? W szczególności, co się dzieje z tym stosunkiem, gdy $6\varphi \to 0^0$, lub gdy $6\varphi \to 180^0$?

58. Jeżeli w trójkącie ABC poprowadzimy dwusieczne i w środkach odcinków AW, BW, CW wystawimy do nich prostopadłe, prostopadłe te wyznaczą nowy trójkąt MNP, przyczem koła, opisane na trójkątach MNP, ABC muszą być sobie równe.

59. Na podstawie AC budujemy trójkąt równoramienny ABC; przez C prowadzimy styczną do koła opisanego, która przecina w punkcie E prostą AB. Dowieść, że $\sphericalangle AEC = \pm(180^0 - 3A)$ i z własności figury wysnuć wzory na $\sin 3\alpha$ i $\cos 3\alpha$.

60. Jeżeli kotangensy kątów trójkąta tworzą postęp arytmetyczny, wówczas to samo powiedzieć można o kwadratach jego boków.

61. Na płaszczyźnie poziomej leży krążek szklany. Promień światła poziomy pada na krążek i po załamaniu się się w nim, odbija się tak, że promień wychodzący jest równoległy do padającego. Pod jakim kątem pada promień na krążek? Spółczynnik załamania szkła względem powietrza $=\frac{3}{2}$.

62. Dany jest trójkąt ABC, w którym $C = 90^0$. Kreślimy prostą CL, nie przecinającą konturu trójkąta i nachyloną pod kątem α do boku b, poczem kreślimy $AA' \perp CL$ i $BB' \perp CL$. Jak należy dobrać kąt α, żeby suma pól trójkątów $AA'C$ i $BB'C$ równała się danej liczbie k^2? Jakie są warunki możliwości zadania? Czemu równa się k^2, jeżeli $\alpha = B$?

63. Jeżeli w kwadrat wpiszemy koło i oznaczymy przez α i β kąty, pod któremi widać przekątne kwadratu z dowolnego punktu okręgu, wówczas $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta$ jest wiekością stałą.

Jak zmienia się suma tangensów $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta$, gdy punkt porusza się po okręgu? W szczególności, kiedy suma ta jest największa?

69. Dane są dwie równoległe i pomiędzy niemi punkt A. Zbudować trójkąt prostokątny ABC tak, żeby wierzchołek kąta prostego leżał w A oraz żeby dwa inne wierzchołki leżały na równoległych. Zbadać zmiany pola tego trójkąta w zależności od kąta $\sphericalangle XAB = d$, gdzie XA oznacza prostą, prostopadłą do obu danych równoległych.

Kiedy pole to osiąga wartość najmniejszą?

65. Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $C = 90^0$. Trójkąt ten obraca się dokoła prostej, przechodzącej przez wierzchołek C, leżącej w płaszczyźnie trójkąta, nie przecinającej konturu jego i tworzącej z bokiem b kąt x. Wyrazić pole powierzchni bocznej bryły w zależności od x, b, A. Zbadać, w jaki sposób zmienia się to pole, jeżeli przy stałych b i A kąt x jest zmienny. W szczególności wyznaczyć maximum pola.

66. Dane są dwa półkola, wykreślone na średnicach AB i AB' i wewnętrznie do siebie styczne w punkcie A. Przez punkt A prowadzimy sieczną, która przecina jedno półkole w C, drugie w D. Przez AB oznaczamy średnicę większego półkola. Zbadać, w jaki sposób zmienia się pole trójkąta BCD i kiedy jest ono największe.

67. W trójkącie ABC wysokość CC' połowi wysokość AA'.

1) Dowieść, że mamy $\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = 2$.

2) Mając dany kąt A, obliczyć kąty B i C. Przedyskutować rozwiązania

68. Funkcję

$$y = \sin^2(\alpha + \beta) + p \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta) + q \cos^2(\alpha + \beta)$$

wyrazić w zależności tylko od p i q, mając dane, że $\operatorname{tg} \alpha$ i $\operatorname{tg} \beta$ są pierwiastkami równania

$$x^2 + px + q = 0,$$

Funkcje połowy kąta.

§ **64.** Jeżeli we wzorze

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$$

położymy $\alpha = \frac{x}{2}$, a więc $2\alpha = x$,

będziemy mieli $\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \cos x$,

a ponieważ $\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} = 1$,

mamy układ równań, z których znajdujemy, że

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$$

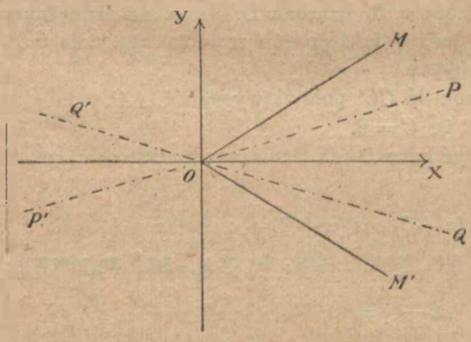
$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$

a więc

$$\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

Wzory te są dwuznaczne, co daje się łatwo wytłómaczyć. Istotnie, w zadaniu mamy dany nie kąt x, lecz jego kosinus. Otóż nie jeden kąt odpowiada tej wartości kosinusa, lecz dowolna liczba kątów, objętych wzorem $n \cdot 360^0 \pm x$. Przypuśćmy np, że dany nam kosinus jest dodatni. Niech $\sphericalangle XOM$ (rys. 83) będzie najmniejszym kątem, którego kosinus równa się $\cos x$. Jak wiadomo, kąt wklęsły $\sphericalangle XOM'$ ma ten sam kosinus. Wszystkie kąty dodatnie, objęte wzorem $n \cdot 360^0 \pm x$ zlewają się na rysunku bądź z kątem ostrym $\sphericalangle XOM$, bądź z kątem wklęsłym $\sphericalangle XOM'$. Tak samo wszystkie kąty ujemne, których kosinusy równają się $\cos x$, zlewają się na rysunku bądź z kątem ostrym ujemnym $\sphericalangle XOM'$, bądź z kątem wklęsłym ujemnym $\sphericalangle XOM$. Jeśli teraz wykreślimy dwusieczne zarówno kątów ostrych, jak wklęsłych, o których była mowa, przekonamy się, że jedne z otrzymanych kątów (np. $\sphericalangle XOP = \frac{x}{2}$ lub $\sphericalangle XOQ = -\frac{x}{2}$) mają kosinus dodatni, inne



Rys. 83.

zaś $\left(\text{jak } \sphericalangle XOQ' = \frac{360^0 - x}{2} \text{ lub } \sphericalangle XOP' = -\frac{360^0 - x}{2}\right)$ mają kosinus ujemny.

Z wzorów powyższych moglibyśmy odrazu otrzymać wzór na $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Dogodniej jednak będzie postąpić inaczej. Mianowicie z tożsamości

$$\sin x = 2 \sin\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2}$$

wynika, że

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{2\cos^2\frac{x}{2}}$$

czyli

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}.$$

Wzór ten nie jest dwuznaczny, gdyż jeśli mamy dane nietylko $\cos x$, lecz i $\sin x$, wówczas zupełnie dokładnie oznaczyć możemy wielkość kąta x, a przez to samo i wielkość kąta $\frac{x}{2}$, jeżeli mamy na myśli kąt x nie większy od 360^0.

Ćwiczenia XIX. 1. Przekształcić wzór na $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, mnożąc licznik i mianownik przez $1 - \cos x$.

2. Obliczyć funkcje kątów 15^0 i $22^0 30'$.

3. Mając dane równanie $4 \sin x + 3 \cos x = 3$, obliczyć $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Sprawdzić następujące tożsamości (4 — 10):

4. $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

5. $2 \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - 4 \operatorname{ctg}\alpha$.

6. $\operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2}{\cos\alpha}$

7. $\frac{\cos\frac{A}{2} - \sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2}} = \frac{1}{\cos A} - \operatorname{tg} A$.

8. $\frac{\cos(45^0 + \beta)}{\cos(45^0 - \beta)} = \frac{1}{\cos 2\beta} - \frac{1}{\operatorname{ctg} 2\beta}$.

9. $\left(\operatorname{tg}\omega + \frac{1}{\cos\omega}\right) \cdot \left(\operatorname{ctg}\omega + \frac{1}{\sin\omega}\right) = \operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\omega}{2}\right) \cdot \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$.

10. $\frac{2\cos\omega - 1}{2\cos\omega + 1} = \operatorname{tg}\left(30^0 + \frac{\omega}{2}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(30^0 - \frac{\omega}{2}\right)$

11. Jeżeli $0^0 < \alpha < 180^0$, wówczas $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} > 1 + \operatorname{ctg}\alpha$. Czy nierówność jest prawdziwa, gdy $180^0 < \alpha < 360^0$?

12. Wykazać, że zagadnienie: „mając dane $\sin\alpha$ lub $\cos\alpha$, obliczyć funkcje kąta $\frac{\alpha}{3}$" prowadzi do równania 3-go stopnia.

13 Z wzoru kosinusów otrzymać zależność między $\cos\frac{A}{2}$ a bokami trójkąta oraz wzór połówkowy. [Wskazówka: do obu części wzoru na $\cos A$ dodać po 1].

14. W trójkącie ABC dane są liczby

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \beta \quad \text{oraz} \quad \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \gamma.$$

1) Obliczyć $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ w zależności od β i γ.

2) Jaki związek zachodzić powinien między β i γ, żeby bok, przeciwległy kątowi A, był średnią arytmetyczną dwu drugich boków trójkąta?

3) Rozwiązać trójkąt, kładąc

$\beta = \frac{2}{3}$, $\gamma = \frac{1}{2}$, $R = 1$.

15. Wykazać, że $\sin\alpha$ oraz $\cos\alpha$ wyrażają się wymiernie zapomocą funkcji $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

16. Mając dane, że $\sin x + \cos x = m$,

1) Obliczyć $\operatorname{tg} x$

(2) Przedyskutować otrzymane równanie, uważając m za parametr zmienny.

(3) Na podstawie tej dyskusji ustalić maxima i minima funkcji $\sin x + \cos x$, gdy x zmienia się od 0^0 do 360^0.

Zamiana sum i różnic funkcyj na iloczyny.

§ **65**. W niektórych zadaniach poprzednich rozdziałów natrafiliśmy na wzory, które nie nadawały się do rachunku logarytmicznego, ponieważ miały kształt dwumianów lub wielomianów. Obecnie zajmiemy się sposobami przekształcania takich wielomianów na jednomiany, t. j. jak niekiedy mówią — sprowadzaniem wzorów trygonometrycznych do postaci logarytmicznej.

Punktem wyścia naszych rozważań będą wzory

$$\left.\begin{aligned}
\sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\
\sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha - \beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.
\end{aligned}\right\} \quad (I)$$

Dodając do siebie pierwsze dwie tożsamości, mamy

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta.$$

Jeżeli położymy

$$\alpha + \beta = x$$
$$\alpha - \beta = y.$$

będziemy mieli $\alpha = \frac{x+y}{2}, \quad \beta = \frac{x-y}{2}.$

Podstawiając te wartości do poprzednio otrzymanej tożsamości, mamy

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}.$$

Odejmując od siebie pierwsze dwie tożsamości (I), otrzymujemy

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

Postępując w podobny sposób z trzecią i czwartą tożsamością (I), t. j. raz dodając je do siebie, to znów odejmując, otrzymujemy

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2},$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

Zapomocą powyższych wzorów przekształcamy sumy algebraiczne sinusów i kosinusów, sprowadzając je do postaci logarytmicznej. Wzory te jednak znane były przed wynalezieniem logarytmów. Autorem ich był wybitny matematyk niemiecki XV w. Werner, proboszcz z Norymbergi. W owych czasach posługiwano się niemi w sposób wręcz odwrotny: przekształcano mianowicie iloczyny na sumy algebraiczne, co ułatwiało rachowanie zapomocą tablic wartości naturalnych funkcyj. Mając np. do obliczenia iloczyn

$$\sin 62^0 10' \cdot \cos 40^0 50'$$

możemy napisać

$$\begin{aligned} \sin 62^0 10' \cdot \cos 40^0 50' &= \tfrac{1}{2} (\sin 103^0 + \sin 21^0 20') \\ &= \tfrac{1}{2} (\sin 77^0 + \sin 21^0 20') \\ &= \tfrac{1}{2} (0{,}9744 + 0{,}3638) \\ &= 0{,}6691 \end{aligned}$$

Przykład I. *Dowieść, że*

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2},$$

jeżeli mamy $\alpha + \beta + \gamma = 180^0.$

Sprowadzamy, jak zwykle, tożsamość warunkową do bezwzględnej. Mamy kolejno

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta)$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$= 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$$

$$= 4\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}.$$

Przykład II. *Sprowadzić do postaci logarytmicznej funkcję*

$$\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$$

Mamy kolejno

$$\frac{1+\cos x}{1-\cos x} = \frac{\cos 0^0 + \cos x}{\cos 0^0 - \cos x}$$

$$= \frac{2\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\left(-\frac{x}{2}\right)}{-2\sin\frac{x}{2}\sin\left(-\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$= \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}.$$

Wynik ten można było otrzymać jeszcze prędzej zapomocą wzorów § 64 (str. 127).

§ **66**. Nawiązując do poznanych wzorów, możemy dowieść faktu, który niewątpliwie musiał uderzyć każdego ucznia, posługującego się tablicami trygonometrycznemi. Możemy mianowicie dowieść, że

I. *Tangensy kątów ostrych rosną prędzej od sinusów, a logarytmy tangensów rosną prędzej od logarytmów sinusów.*

a) Jeżeli mamy $x > 0^0$, $\triangle x > 0^0$ oraz $x + \triangle x \leqslant 90^0$, gdzie $\triangle x$ oznacza przyrost kąta, wówczas chodzi o dowiedzenie, że

$$\sin(x+\triangle x) - \sin x < \operatorname{tg}(x+\triangle x) - \operatorname{tg} x \qquad (1)$$

czyli, że $$2\sin\left(\frac{\triangle x}{2}\right)\cos\left(x+\frac{\triangle x}{2}\right) < \frac{\sin(\triangle x)}{\cos x\,.\cos(x+\triangle x)}$$

lub, co na jedno wychodzi, że

$$\cos\left(x+\frac{\triangle x}{2}\right) < \frac{\cos\left(\frac{\triangle x}{2}\right)}{\cos x \,.\, \cos(x+\triangle x)} \qquad (2)$$

Otóż ostatnia nierówność jest oczywista, gdyż kosinusy kątów ostrych maleją przy wzrastaniu kąta, czyli musi być

$$\cos\left(x+\frac{\triangle x}{2}\right) < \cos\left(\frac{\triangle x}{2}\right),$$

a mianownik w części prawej nierówności (2) jest < 1.

b) Przy tych samych założeniach mamy

$$\lg \operatorname{tg}(x+\triangle x) - \lg \operatorname{tg} x = [\lg \sin(x+\triangle x) - \lg \sin x] +$$
$$+ [\lg \cos x - \lg \cos(x+\triangle x)],$$

a ponieważ oba składniki części prawej równania są liczbami dodatniemi (dlaczego?), zatem

$$\lg \operatorname{tg}(x+\triangle x) - \lg \operatorname{tg} x > \lg \sin(x+\triangle x) - \lg \sin x.$$

II. *Zarówno sinusy jak logarytmy sinusów kątów ostrych rosną tem wolniej, im kąt jest większy.*

a) Niech będzie znów $x > 0^0$, $\triangle x > 0^0$, $x + \triangle x \leqslant 90.^0$ Chcemy dowieść, że

$$\sin(x+2\triangle x) - \sin(x+\triangle x) < \sin(x+\triangle x) - \sin x \qquad (1)$$

czyli że $\sin(x+2\triangle x) + \sin x < 2\sin(x+\triangle x)$

albo $\sin(x+\triangle x) \,.\, \cos(\triangle x) < \sin(x+\triangle x)$

albo wreszcie $\cos(\triangle x) < 1$

co jest oczywiste. Wszystkie ogniwa naszego rozumowania są odwracalne (t. j. wychodząc z nierówności $\cos(\triangle x) < 1$, możemy otrzymać kolejno wszystkie poprzednie), a więc nierówność (1) została dowiedziona.

b) Wychodząc z oczywistej nierówności

$$\cos(2\triangle x) < 1$$

mamy kolejno $\cos(2\triangle x) - \cos(2x+2\triangle x) < 1 - \cos(2x+2\triangle x)$

$$\sin(x+2\triangle x) \,.\, \sin x < \sin^2(x+\triangle x)$$

a ponieważ wszystkie czynniki są tu dodatnie, zatem

$$\lg \sin(x+2\triangle x) + \lg \sin x < 2\lg \sin(x+\triangle x)$$

czyli ostatecznie

$$\lg \sin(x+2\triangle x) - \lg \sin(x+\triangle x) < \lg \sin(x+\triangle x) - \lg \sin x.$$

Z dwóch powyższych twierdzeń wynikają następujące wnioski praktyczne:

(I) *Jeżeli dane w zadaniu liczby możemy uważać za* ***dokładne****, wówczas kąt ostry możemy dokładniej obliczyć zapomocą tangensa niż zapomocą sinusa. Różnica dokładności obu sposobów obliczania jest tem większa, im kąt ostry jest większy.*

Ponieważ $\cos\alpha = \sin(90^0 - \alpha)$,

zatem *kąt ostry możemy dokładniej obliczyć zapomocą tangensa, niż zapomocą kosinusa i różnica dokładności jest tem większa, im kąt jest mniejszy.*

(II) *Jeżeli, przeciwnie, dane w zadaniu* ***wartości kątów są obarczone błędami****, wówczas tem mniejszy stosunkowo popełnimy błąd w dalszym rachunku, im wolniej zmienia się użyta w tym rachunku funkcja, należy więc w takich razach posługiwać się sinusami przy kątach większych od* 45^0, *kosinusami zaś przy kątach mniejszych od* 45^0.

Ćwiczenia XX. Przedstawić w postaci jednomianu możliwie najprostszego następujące wzory (1 — 18):

1. $\dfrac{\sin 7\alpha - \sin 5a}{\sin 7\alpha + \sin 5a}$. 2. $\dfrac{\cos 6\alpha - \cos 4\alpha}{\sin 6\alpha + \sin 4\alpha}$.

3. $\dfrac{\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \sin 4\alpha}{\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cos 4\alpha}$.

4. $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha}$.

5. $\sin^2\alpha - \sin^2\beta$. 6. $\cos^2\alpha - \cos^2\beta$.

7. $\sin\alpha + \cos\beta$. 8. $\sin\alpha - \cos\beta$.

9. $1 + \sin\alpha$. 10. $1 - 2\sin\alpha$.

11. $2\sin\alpha + \sin 2\alpha$. 12. $1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha$.

13. $1 + 2\sin\alpha - \cos 2\alpha$. 14. $1 + \sin\alpha + \cos\alpha$.

15. $\sin 2\alpha \sin\beta - \sin\alpha \sin 2\beta$. 16. $\sin 3\alpha \sin\beta - \sin\alpha \sin 3\beta$.

17. $\sqrt{2} + 2\sin\varphi$. 18. $\sqrt{3} - 2\cos\varphi$.

Sprawdzić tożsamości (19 — 23), w których $A + B + C = 180^o$.

19. $\sin A + \sin A - \sin C = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

20. $\cos A + \cos B + \cos C = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 1$.

21. $\cos A + \cos B - \cos C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 1$.

22. $\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} = 1 + 4\sin\frac{A+B}{4}\sin\frac{B+C}{4}\sin\frac{C+A}{4}$.

23. $\sin(B + C - A) + \sin(C + A - B) + \sin(A + B - C) - \sin(A + B + C) = 4\sin A \sin B \sin C$.

24. Sprawdzić następujące tożsamości:

$$\sin x + \sin (x + 120^0) + \sin (x + 240^0) = 0$$
$$\cos x + \cos (x + 120^0) + \cos (x + 240^0) = 0.$$

25. Opierając się na własnościach proporcji składanej, otrzymać z wzoru sinusów wzór tangensów oraz wzory Newtona.

26. Jeżeli w trójkącie kąty A, B, C są proporcjonalne do liczb 2, 3, 4, wówczas musi być

$$\cos \frac{A}{2} = \frac{a+c}{2b}.$$

27. Trójkąt jest prostokątny, jeżeli mamy $\operatorname{ctg} \frac{B}{2} = \frac{a+c}{b}$.

28. Jeżeli między kątami dwóch trójkątów zachodzą związki $A + A' = 180^0$, $B = B'$, wówczas między ich bokami zachodzi związek

$$aa' = bb' + cc'.$$

29. W każdym trójkącie zachodzi związek

$$(a + b + c)\left(\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2}\right) = 2c \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2}.$$

30. Sumy algebraiczne $\operatorname{tg} A \pm \operatorname{tg} B$ oraz $\operatorname{ctg} A \pm \operatorname{ctg} B$ przekształcić na jednomiany.

31. Sumy algebraiczne $\sin A \pm \operatorname{tg} A$, $\cos A \pm \operatorname{ctg} A$ przekształcić na jednomiany.

32. Sprowadzić do postaci logarytmicznej dwumiany

$$\cos A \pm \sin B.$$

33. Drabina, oparta o parapet okna, tworzy z ziemią kąt α. Jeżeli cofniemy jej dolny koniec o d metrów, drabina nachylona będzie do ziemi pod kątem β, a górny jej koniec oprze się o parapet okna, położonego o jedno piętro niżej. Obliczyć odległość między oknami.

34. Jeżeli $0^0 < \alpha < 180^0$, $0^0 < \beta < 180^0$, to musi być

(I) $\sin \alpha + \sin \beta > \sin (\alpha + \beta)$.

(II) $\sin \alpha + \sin \beta < 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$.

(III) $\sin \alpha \sin \beta < \sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2}$.

35. Jeżeli boki trójkąta tworzą postęp arytmetyczny, to kąty jego nie mogą tworzyć postępu arytmetycznego.

Rozwiązać następujące równania (36 — 50):

36. $\cos 4x + \cos 2x = 2 \cos x$.

37. $\sin 10x - \sin 6x = 2 \sin 2x$

38. $2 \sin 2x - \sin x = \sin 3x$.

39. $\cos x - \cos 2x = \sin 3x$.

40. $\sin A + \sin 3A + \sin 5A = 0$.

41. $\cos A + \cos 3A + \cos 5A = 0$.

42. $\sin (x + \alpha) = \sin \alpha + \sin x$.

43. $\sin(x+\alpha) - \sin(x-\alpha) = \sqrt{3} \sin \alpha$.

44. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 4 \cos x \cos \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2}$.

45. $2 \sin x \sin 3x = 1$.

46. $\cos x + \cos 2x = 1$.

47. $\sin^2 (x + A) - \sin^2 (x - A) = \sin 2 A$.

48. $\sin^2 nx - \sin (n - 1) x = \sin^2 x$.

49. $2 \sin x \sin 3 x = 1$. 50. $4 \sin x \sin 3 x = 1$.

51. Dane jest półkole o średnicy AB i w niem promień OD, prostopadły do AB. Przez A prowadzimy cięciwę AC, która przecina OD, w punkcie E. Jak wielki musi być kąt $\sphericalangle BAC = \alpha$, żeby w czworobok $OECB$ można było wpisać koło?

(Egzamin ustny do szkoły wojskowej w Saint-Cyr.)

52. Równania (I) $\cos x - \cos 2x = 0$, (II) $\sin x + \sin 2x = 0$ rozwiązać trzema sposobami: 1) zapomocą wzorów redukcyjnych; 2) zapomocą wzorów na funkcje podwojonego kąta; 3) zapomocą przekształcenia na jednomian. Sprawdzić, że wszystkie trzy metody dają te same rozwiązania

53. Równania (I) $\sin \alpha - \cos \alpha = 0$, (II) $\sin \alpha + \cos \alpha = 0$, rozwiązać trzema sposobami, wskazanemi w zadaniu poprzedniem, a prócz tego czwartym sposobem — przez wprowadzenie funkcji $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

54. Jakim warunkom musi czynić zadość parametr a, żeby równanie $\sin \varphi \sin 3 \varphi = a$ posiadało rozwiązania?

55. Rozłożyć na czynniki trójmian

$$\sin 2 nA + \sin 2 nB + \sin 2 nC,$$

w którym n oznacza dowolną liczbę całkowitą, kąty zaś spełniają warunek $A + B + C = 180^0$.

56. Przy jakiej wartości kąta x funkcja

$$y = \sin (\alpha + x) - \sin (\alpha - x)$$

osiąga najmniejszą (największą) wartość?

57. To samo pytanie w zastosowaniu do funkcji

$$y = \sin x + \cos x.$$

58. W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna c jest stała; jak zmienia się suma przyprostokątnych $b + c$, gdy kąt A przybiera wszelkie możliwe wartości?

59. W trójkącie przeciwprostokątna c jest stała; jak zmienia się stosunek jego obwodu do przeciwprostokątnej w zależności od zmian kąta A? W szczególności: czy stosunek ten dąży do jakiejkolwiek granicy, gdy $A \longrightarrow 90^0$?

60. Kąty x i y są zmienne, lecz suma ich jest stała $(= \alpha)$ i mniejsza od 180^0 stopni. Przekształcić iloczyn $2 \sin x \sin y$ na sumę i z otrzymanej tożsamości odczytać, kiedy iloczyn sinusów osiąga wartość największą.

61. Dowieść, że $\operatorname{tg} x \,.\, \operatorname{tg} y = 1 - \dfrac{2 \cos \alpha}{\cos (\alpha - 2x) + \cos \alpha}$

gdzie $\alpha = x + y$. Zakładając, że α jest wielkością stałą, mniejszą od 90^0, odczytać z tej tożsamości, kiedy iloczyn tangensów osiąga maximum.

62. Kąty x, y są zmienne, lecz suma ich pozostaje stała $(= \alpha)$. Kiedy funkcje $\sin x \pm \sin y$, $\cos x \pm \cos y$ osiągają największą (najmniejszą) wartość?

63. Zbadać i przedstawić graficznie przebieg zmienności funkcji $y = \cos(\alpha + x) . \cos(\alpha - x)$, gdzie α jest kątem stałym, natomiast x zawiera się między -90^0 i $+90^0$.

[Wskazówka: przekształcić iloczyn na sumę].

64. To samo zadanie o funkcji $y = \sin(\alpha + x) \sin(\alpha - x)$. Czem różni się obraz tej funkcji od obrazu funkcji z poprzedniego zadania?

65. Obliczyć długość podstaw trapezu równoramiennego, wpisanego w koło o promieniu R, jeżeli jeden z równych boków $= a$, pole zaś trapezu $= S$.

[Wskazówka: połączyć wierzchołki ze środkiem koła i wprowadzić do rachunku kąty, pod któremi widać ze środka koła dwa kolejne boki].

66. Przez punkt M przecięcia się kół o promieniach r_1 i r_2 prowadzimy sieczną. Jak należy wykreślić tę sieczną, żeby iloczyn cięciw $MA . MB$, wyznaczonych przez nią w obu kołach, miał wartość możliwie największą?

[Wskazówka: jako niewiadome można obrać kąty 2α i 2β, pod któremi ze środków kół widać odpowiednio cięciwy MA i MB].

67. Rozwiązać układ równań

$$\sin x + \sin y = 2p \sin\alpha$$
$$\cos x + \cos y = 2p \cos\alpha,$$

w którym p i α są dane. Jakiemu warunkowi musi czynić zadość liczba p, żeby równania były możliwe do rozwiązania?

[Egzamin dojrzałości (baccalauréat) w Paryżu].

Inne przykłady przekształcenia dwumianów na jednomiany. Kąt pomocniczy.

§ 67. Każdy dwumian y ma jedną z dwóch postaci

(I) $y = A + B$, (II) $y = A - B$,

gdzie A i B są to jednomiany dodatnie. Możemy założyć, że $|A| > |B|$.

I. Pierwszy dwumian możemy napisać w postaci

$$y = A\left(1 + \frac{B}{A}\right). \tag{1}$$

Ponieważ tangens przybierać może wszelkie wartości, mamy prawo wprowadzić do rachunku t. zw. *kąt pomocniczy* (lub *posiłkowy*) φ, określony zapomocą równania

$$\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{B}{A}. \tag{2}$$

Wobec tego równanie (1) przybiera postać

$$y = A\,(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)$$
$$= \frac{A}{\cos^2 \varphi}.$$

W ten sposób sprowadziliśmy dwumian do postaci logarytmicznej.

II. Drugi dwumian możemy napisać w postaci

$$y = A\left(1 - \frac{B}{A}\right) \tag{3}$$

ponieważ zaś $\left|\frac{B}{A}\right| < 1$, zatem mamy prawo położyć

$$\sin^2 \varphi = \frac{B}{A}. \tag{4}$$

Stąd wynika, że

$$y = A\,(1 - \sin^2 \varphi)$$
$$= A \cos^2 \varphi.$$

§ **68.** Metoda postępowania, wyłożona w poprzednim paragrafie, jest ogólna, zdarza się jednak, że inne jakieś przekształcenie lub wprowadzenie innego kąta pomocniczego prowadzi łatwiej do pożądanego wyniku.

Przykład I. *Przekształcić na jednomian funkcję*

$$y = A \sin x + B \cos x.$$

Zamiast stosować metodę ogólną, lepiej jest postąpić tak:

kładąc
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A}{B},$$

mamy
$$y = B\left(\frac{A}{B} \sin x + \cos x\right)$$
$$= B\,(\operatorname{tg} \varphi \sin x + \cos x)$$
$$= \frac{B}{\cos \varphi}(\sin \varphi \sin x + \cos \varphi \cos x)$$
$$= \frac{B \cos(\varphi - x)}{\cos \varphi}.$$

Przekształcenie to daje nam możność rozwiązania nowego i dość często spotykanego typu równań trygonometrycznych.

Przykład II. *Rozwiązać równanie*

$$a \sin x + b \cos x = c \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (A)$$

Zastosowanie: $a = -3,\ b = 2,\ c = -3{,}5$

Zakładając, że wszystkie spółczynniki są od zera różne, i kładąc

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} \tag{1}$$

mamy

$$\sin x + \operatorname{tg} \varphi \cos x = \frac{c}{a}$$

$$\frac{\sin(x+\varphi)}{\cos\varphi} = \frac{c}{a}. \tag{2}$$

Aby otrzymać rozwiązanie, wystarczy z równania (1) obliczyć kąt φ, z równania zaś (2) kąt $x+\varphi$. Oba rachunki wykonać możemy zapomocą logarytmów.

Warunkiem możliwości rozwiązania jest nierówność

$$|\sin(x+\varphi)| \leqslant 1,$$

czyli

$$\frac{c^2}{a^2}\cos^2\varphi \leqslant 1,$$

a ponieważ z równania (1) wynika, że

$$\cos^2\varphi = \frac{a^2}{a^2+b^2},$$

zatem warunek możliwości przybiera postać

$$c^2 \leqslant a^2 + b^2.$$

Uczeń sam zbada, jak rozwiązuje się równanie (A), gdy którykolwiek ze spółczynników a, b, c równa się zeru.

Jeżeli położymy $a = -3$, $b = 2$, $c = -3{,}5$, równanie dane przybiera postać

$$2\cos x - 3\sin x = -3{,}5.$$

Kładąc $\operatorname{tg}\varphi = \frac{3}{2}$, czyli $\varphi = 56^0\,19'$,

mamy $\cos(x + 56^0\,19') = -1{,}75\cos 56^0\,19'$.

Chcąc uniknąć ujemnego czynnika $-1{,}75$, możemy ostatnie równanie napisać w postaci

$$\cos(180^0 - x - 56^0\,19') = 1{,}75 . \cos 56^0\,19'$$

czyli $\cos(123^0\,41' - x) = 1{,}75 . \cos 56^0\,19'$,

$$\lg\cos(123^0\,41' - x) = 1{,}9871$$

skąd $123^0\,41' - x = \pm 13^0\,54'$

zatem $x_1 = 109^0\,47' + n . 360^0$

$$x_2 = 137^0\,35' + n . 360^0.$$

Uwagi. 1. Równanie typu $a \sin x + b \cos x = c$ można rozwiązać, nie posługując się kątem pomocniczym. Wystarczy mianowicie zastąpić $\sin x$ i $\cos x$ przez $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Uczeń wykona odpowiednie rachunki zarówno w równaniu ogólnem, jak i w przykładzie liczbowym i znajdzie warunek możliwości zadania.

2. Kładąc

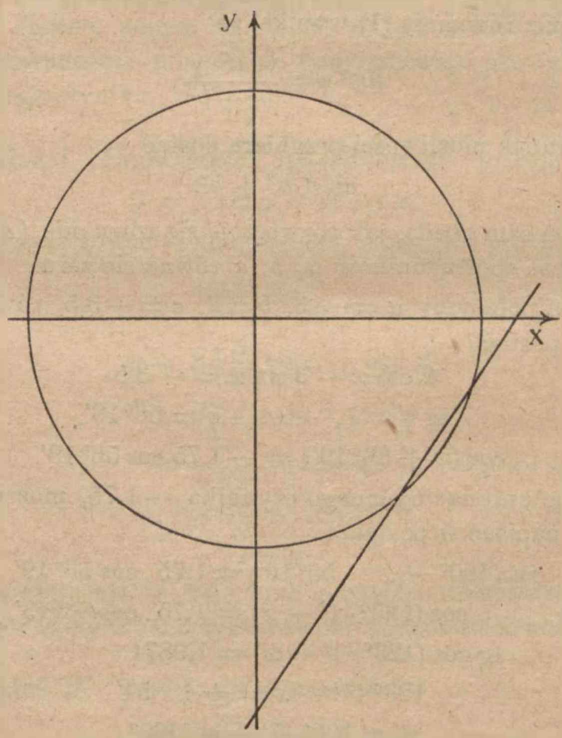
$$\sin x = X, \qquad \cos x = Y, \tag{A}$$

możemy zadane równanie napisać w postaci

$$aX + bY = c. \tag{1}$$

Jest to równanie linji prostej, ponieważ jednak, w myśl powyższych oznaczeń, mamy $|X| \leqslant 1$ oraz $|Y| \leqslant 1$, zatem nie cała prosta, lecz tylko pewien jej odcinek wchodzi w grę w danem zadaniu. Ponieważ mamy dalej

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$



Rys. 84.

zatem możemy napisać drugie równanie

$$X^2 + Y^2 = 1. \qquad (2)$$

Jestto równanie koła o promieniu $= 1$. (Gdzie leży środek koła?)

Widzimy z tego, że rozwiązanie zadanego równania trygonometrycznego jest tem samem, co rozwiązanie układu, złożonego z równań (1) i (2), czyli tem samem, co znalezienie punktów przecięcia się pewnej prostej z kołem.

Rozwiązań mamy dwa, jedno lub żadnego, zależnie od liczby punktów spólnych prostej (1) z kołem (2) czyli zależnie od tego, czy prostopadła, poprowadzona ze środka koła do prostej, jest mniejsza, równa, czy większa od promienia. Uczeń przeprowadzi odpowiedni rachunek i otrzyma warunek istnienia jednego lub dwóch rozwiązań oraz warunek niemożliwości zadania.

Rysunek 84 odpowiada rozwiązanemu powyżej przykładowi liczbowemu.

Ćwiczenia XXI. 1. Sprowadzić do postaci logarytmicznej funkcje $1 + \operatorname{tg}^3 \alpha$ oraz $1 + \operatorname{tg}^4 a$.

2. Sprowadzić do postaci logarytmicznej wyrażenia

$$\sqrt{a^2 + b^2}, \quad \sqrt{a^2 - b^2}.$$

3. Sprowadzić do postaci logarytmicznej wyrażenia

$$\frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}, \quad \sqrt{a + b} + \sqrt{a - b}.$$

4. Przekształcić na jednomian funkcję

$$y = \frac{a - b \sin \alpha}{(a + b) \cos \alpha}.$$

5. Dowieść, że jeżeli a i b są to liczby dodatnie, przyczem $b < a$ i jeżeli $\sin \varphi = b : a$, wówczas mamy

$$\lg (a + b) = \lg a + \lg 2 + 2 \lg \sin \left(45^0 \pm \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$= \lg b - \lg \operatorname{tg} \varphi \pm \lg \operatorname{tg} \left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right).$$

6. Sprowadzić do postaci logarytmicznej funkcję

$$y = \sqrt{a^2 - b^2 \cos^2 A}.$$

7. Pierwszy wyraz postępu geometrycznego $= \sin x$, wykładnik postępu $= 2 \cos x$. Kiedy postęp jest malejący?

Zakładając, że $0 < x < 90^0$, obliczyć kąt x, jeżeli mamy dane dwa warunki: 1) że postęp jest nieograniczenie malejący; 2) że granicą jego jest liczba $2\sqrt{2}$.

8. W wierzchołku O trójkąta OBC wystawiamy prostopadłą do jego płaszczyzny i na tej prostopadłej obieramy punkt A. Obliczyć odcinek

OA jako funkcję następujących danych: $BC = a$, $\sphericalangle ABO = \beta$, $\sphericalangle ACO = \gamma$, $\sphericalangle BOC = \alpha$. Otrzymany wzór doprowadzić do postaci logarytmicznej przez wprowadzenie kąta pomocniczego.

(Egzamin ustny do szkoły wojskowej w Saint-Cyr).

9. Rozwiązać zapomocą logarytmów równanie

$$a \operatorname{tg} x + b \operatorname{ctg} y = c,$$

w którem $a = 1{,}577$, $b = 2{,}765$, $c = 4{,}897$.

10. Kąty dodatnie α i β, zawarte między 0^0 i 360^0, spełniają równanie $a \sin x + b \cos x = c$; w zależności od a, b, c obliczyć funkcje

$$\sin (\alpha + \beta), \quad \cos (\alpha \pm \beta).$$

11. Jaki warunek musi być spełniony, żeby równanie $a \sin x + b \cos x + c = 0$ posiadało dwa rozwiązania, różniące się od siebie o 30^0?

12. Jaki jest warunek konieczny i wystarczający, aby równania

$$a \sin x + b \cos x = c$$
$$a' \sin x + b' \cos x = c'$$

posiadały wspólne rozwiązanie?

13. Dokoła początku spółrzędnych obraca się prosta OM. Na osi OX mamy dany odcinek $OA = a$, na osi OY odcinek $OB = b$. Oznaczamy przez A' i B' rzuty punktów A i B na ruchomą prostą OM.

1) Wyrazić sumę odcinków $OA' + OB'$ jako funkcję kąta $\sphericalangle XOM = \alpha$ i zbadać zmiany tej sumy.

2) To samo dla sumy $AA' + BB'$.

3) Czy punkty A' i B' mogą zlewać się i kiedy?

Rozwiązanie dwóch następnych zadań polega na r u g o w a n i u zmiennego kąta z układu równań.

14. Punkt M porusza się po płaszczyźnie tak, że jego spółrzędne czynią zawsze zadość warunkom

$$x = \sin \alpha; \quad y = \sin 2\alpha,$$

gdzie α zmienia się od 0^0 do 360^0. Znaleźć równanie krzywej, którą zakreśla punkt M. Wykreślić ją na papierze milimetrowym, obierając 10 cm. jako jednostkę długości.

15. Ze stałego punktu O na prostej OX prowadzimy półprostą i na niej odkładamy $OP = a \operatorname{tg} \varphi$, gdzie a jest wielkością stałą, zaś $\varphi = \sphericalangle XOP$. Co kreśli punkt P, gdy półprostą obracamy dokoła O?

ROZDZIAŁ V.

Równania trygonometryczne.

§ **69.** Równania trygonometryczne bywają dwóch rodzajów:

1) takie, które zawierają tylko funkcje trygonometryczne oraz wielkości stałe,

2) takie, które prócz funkcyj trygonometrycznych i wyrazów stałych zawierają argumenty funkcyj.

Do drugiego rodzaju należy np. równanie

$$a \operatorname{tg} x + b \cos x = cx + d,$$

które oprócz funkcyj $\operatorname{tg} x$, $\cos x$ z ich spółczynnikami oraz wyrazu wolnego d zawiera jeszcze argument tych funkcyj w postaci wyrazu cx.

Rozwiązywanie równań pierwszego rodzaju.

§ **70.** Możemy z łatwością obmyśleć metodę ogólną rozwiązywania równań pierwszego rodzaju. Staramy się mianowicie wszystkie funkcje, występujące w równaniu, zastąpić jedną jakąś funkcją. Mając dane np. równanie

$$\cos x + m \operatorname{tg} x = a,$$

możemy zastąpić najpierw $\operatorname{tg} x$ przez $\sin x$ i $\cos x$, następnie zaś $\sin x$ przez $\cos x$, co daje,

$$\cos x \pm \frac{m\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x} = a,$$

kładąc zaś $\cos x = y$, mamy *równanie algebraiczne*

$$y \pm \frac{m\sqrt{1 - y^2}}{y} = a.$$

Tego rodzaju przekształcenie jest zawsze możliwe. Istotnie, z Ćwiczenia XIX, 15 (str. 130) wiemy, że wszystkie funkcje kąta x dają się wyrazić wymiernie przez $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, możemy tedy uciec się do tego podstawienia, jeżeli nie nasuwa się nam żadne prostsze przekształcenie. Po wykonaniu tego podstawienia wystarczy założyć, że $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = y$, aby otrzymać równanie algebraiczne względem y. Podstawienie to, jako wymierne, nie wprowadza do równania obcych pierwiastków.

Często jednak metoda ogólna prowadzi do zawiłych rachunków lub, co gorsza, do równania algebraicznego wyższego stopnia, którego wcale rozwiązać nie umiemy. Zachodzi tedy potrzeba stworzenia rozmaitych szczególnych sposobów rozwiązywania równań. Najczęściej używane sposoby poznaliśmy w poprzednich rozdziałach, tak iż wystarczy przypomnieć je na przykładach.

(**A**) Wiele równań daje się sprowadzić do postaci

$$\sin x = \pm \sin y$$

lub

$$\operatorname{tg} x = \pm \operatorname{tg} y,$$

które umiemy rozwiązywać.

PRZYKŁAD. *Rozwiązać względem* x *równanie*

$$\sin(x - \alpha) = \sin x - \sin \alpha.$$

Ponieważ

$$\sin \alpha = \sin x - \sin(x - \alpha)$$

$$= 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos\left(x - \frac{\alpha}{2}\right),$$

zatem

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \cos\left(x - \frac{\alpha}{2}\right),$$

skąd

$$x_1 = n . 360^0$$

$$x_2 = n . 360^0 \pm \alpha.$$

(**B**) Często udaje się zapomocą różnych przekształceń rozłożyć równanie na czynniki. Po przyrównaniu do zera czynników zawierających niewiadome, otrzymujemy pierwiastki równania.

PRZYKŁAD. *Rozwiązać równanie*

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 4 \cos x \cos \frac{x}{2} \cos \frac{3}{2} x.$$

Przekształcając lewą część równania, mamy kolejno

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$= 2 \cos \frac{x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} + \sin \frac{5x}{2}\right)$$

$$= 4 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{3x}{2} \cos x.$$

Wobec tego równanie nasze przybiera postać

$$4 \cos x \cos \frac{x}{2} \left(\sin \frac{3x}{2} - \cos \frac{3x}{2}\right) = 0,$$

zatem mamy

$$\cos x = 0 \qquad \text{czyli} \qquad x_1 = n . 360^0 \pm 90^0$$

$$\cos \frac{x}{2} = 0 \qquad \text{„} \qquad x_2 = (4n \pm 1) 180^0$$

wreszcie

$$\sin \frac{3x}{2} = \cos \frac{3x}{2}$$

czyli
$$\operatorname{tg}\frac{3x}{2} = 1,$$
skąd
$$x_3 = n \,.\, 120^0 + 30^0.$$

(C) Jeżeli równanie jest jednorodne względem $\sin x$ i $\cos x$, wówczas zastępujemy obie te funkcje przez $\operatorname{tg} x$.

PRZYKŁAD. *Rozwiązać równanie*
$$\sin^2 x + m\cos^2 x - 2m\sin x\cos x = 2.$$

Równanie to nie jest wprawdzie jednorodne, ale może być z łatwością uczynione jednorodnem, jeżeli uprzytomnimy sobie, że mamy prawo zastąpić 1 przez $\sin^2 x + \cos^2 x$. Otrzymujemy tedy
$$\sin^2 x + m\cos^2 x - 2m\sin x\cos x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x),$$
dzieląc zaś obie części równania przez $\cos^2 x$ (co mamy prawo uczynić, gdyż, jak widać odrazu z równania, $\cos x \neq 0$), mamy
$$\operatorname{tg}^2 x + 2m\operatorname{tg} x + (2 - m) = 0 \qquad (1)$$
Kładąc
$$y = \operatorname{tg} x,$$
otrzymujemy równanie algebraiczne kwadratowe z parametrem zmiennym m:
$$y^2 + 2my + (2 - m) = 0. \qquad (2)$$

Ponieważ $\operatorname{tg} x$ przybierać może dowolne wartości dodatnie i ujemne, zatem jedyny warunek możliwości zadania jest ten, żeby było
$$\tfrac{1}{4}\triangle = m^2 + m - 2 \geqslant 0,$$
czyli
$$m \leqslant -2 \quad \text{lub} \quad m \geqslant 1.$$

Jeżeli przez I i S oznaczymy odpowiednio iloczyn i sumę pierwiastków równania (2), będziemy mogli ułożyć tabelkę następującą, w której przez y_1, y_2 oznaczyliśmy pierwiastki równania (2), przez α zaś i β pierwiastki główne równania (1), odpowiadające y_1 i y_2.

m	>2	2		1		-2	<-2
I	<0	0	>0	>0		>0	>0
S	<0	<0	<0	<0		>0	>0
	$y_1>0$	$y_1=0$	$y_1<0$	$y_1=y_2$	Niema	$y_1=y_2$	$y_1>0$
	$y_2<0$	$y_2<0$	$y_2<0$	$=-1$	pier-	$=2$	$y_2>0$
	$0^0<\alpha<90^0$	$\alpha=0^0$	$-90^0<\alpha<0^0$	$\alpha=\beta$	wiast-	$\alpha=\beta$	$0^0<\alpha<90^0$
	$-90^0<\beta<0^0$	$-90^0<\beta<0^0$	$-90^0<\beta<0^0$	$=-45^0$	ków	$=63^026'$	$0^0<\beta<90^0$

Tabelkę tę musimy jeszcze uzupełnić przez zbadanie, co dzieje się z pierwiastkami równania (2), gdy m rośnie nieograniczenie bądź przez wartości dodatnie, bądź przez ujemne. W tym celu musimy nieco przekształcić równanie (2), kładąc

$$m = \frac{1}{k}.$$

Dzięki temu podstawieniu sprowadzimy badanie nasze do znanego z algebry przypadku, gdy w równaniu kwadratowem spółczynniki dążą do zera (ponieważ $k \to 0$, jeżeli $|m| \to \infty$).

Po tem przekształceniu równanie (2) przybiera postać

$$ky^2 + 2y + 2k - 1 = 0 \qquad (2')$$

z której wynika odrazu, że gdy $k \to 0$, to $y_1 \to \frac{1}{2}$, $y_2 \to -\infty$, zatem $\alpha \to 45^0$, $\beta \to -90^0$, jeżeli $m \to +\infty$; jeżeli zaś $m \to -\infty$, to $\alpha \to 45^0$, $\beta \to 90^0$.

(**D**) Równanie typu $a \sin x \pm b \cos x = c$ rozwiązaliśmy na str. 139.

Rozwiązywanie równań drugiego rodzaju.

§ **71.** Do równań drugiego rodzaju nie możemy zastosować żadnych metod ogólnych i wszystko polega tu na znalezieniu odpowiedniego przekształcenia, co nie zawsze jest możliwe, tak iż wielu równań drugiego rodzaju nie umiemy wcale rozwiązać dokładnie i musimy poprzestawać na rozwiązaniach przybliżonych, np. graficznych. Dla przykładu rozwiążemy kilka układów równań częściej spotykanych w praktyce.

Zadanie I. *Rozwiązać układ równań*

$$x + y = a \qquad (1)$$
$$\sin x + \sin y = b \qquad (2)$$

Korzystając z tego, że znamy sumę kątów $x+y$, postaramy się znaleźć ich różnicę $x-y$, a wówczas zadanie będzie rozwiązane.

Przekształcając lewą część równania (2), otrzymujemy

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2},$$
$$= 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{x-y}{2}.$$

Mamy tedy równanie

$$2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{x-y}{2} = b \qquad (2')$$

czyli

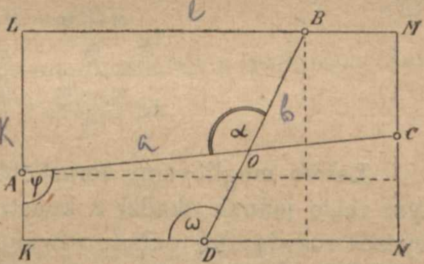
$$\cos \frac{x-y}{2} = \frac{b}{2 \sin \frac{a}{2}}. \qquad (2'')$$

skąd obliczamy zapomocą tablic kąt $x - y$, a znając sumę $x + y$, znajdujemy pierwiastki główne układu równań (1) i (2).

Warunek możliwości zadania wyrażamy zapomocą nierówności

$$|b| \leqslant \left| 2 \sin \frac{a}{2} \right|.$$

Zadanie II. *Dane są na płaszczyźnie cztery punkty* A, B, C, D. *Zbudować prostokąt* KLMN, *którego kolejne boki przechodziłyby przez te punkty, przyczem boki* KL *i* LM *winny być do siebie w stosunku* m : n.



Rys. 85.

Przypuśćmy, że prostokąt *KMNL* na rys. 85 czyni zadość warunkom zadania. Dane nam są odcinki *AC*, *BD*, przecinające się w punkcie *O*, i kąt $\sphericalangle AOB = \alpha$.

Prostokąt potrafimy zbudować, o ile będziemy wiedzieli, pod jakiemi kątami względem prostych *AC*, *BD* prowadzić należy boki prostokąta. Wobec tego niewiadomemi w zadaniu są kąty

$$\sphericalangle KAC = \varphi, \qquad \sphericalangle KDB = \omega.$$

Jeżeli boki *KL*, *LM* oznaczymy odpowiednio przez *k*, *l*, odcinki *AC*, *BD* przez *a* i *b*, wówczas z trójkątów prostokątnych (jakich?) mamy

$$k = b \sin \omega$$

$$l = a \sin \varphi,$$

zatem

$$\frac{b \sin \omega}{a \sin \varphi} = \frac{m}{n}.$$

Dalej z czworoboku *AKDO* mamy

$$\varphi + \omega = 270^0 - (180^0 - \alpha).$$

Uzależniliśmy tedy rozwiązanie zadania od rozwiązania układu równań:

$$\varphi + \omega = 90^0 + \alpha \qquad (1)$$

$$\frac{\sin\omega}{\sin\varphi} = \frac{am}{bn} \qquad (2)$$

Przekształcamy równanie (2) w sposób następujący:

$$\frac{\sin\omega + \sin\varphi}{\sin\omega - \sin\varphi} = \frac{am + bn}{am - bn},$$

czyli

$$\frac{\sin\frac{\omega+\varphi}{2}\cos\frac{\omega-\varphi}{2}}{\cos\frac{\omega+\varphi}{2}\sin\frac{\omega-\varphi}{2}} = \frac{am + bn}{am - bn},$$

skąd ostatecznie mamy

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\omega+\varphi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\omega-\varphi}{2}} = \frac{am + bn}{am - bn}. \qquad (2')$$

Łatwo moglibyśmy teraz obliczyć kąty φ i ω (jak?), w danym razie jednak chodzi o konstrukcję, a więc o czysto geometryczne rozwiązanie układu równań (1) i (2). Otóż wystarczy zauważyć, że równanie (2) ma kształt wzoru sinusów i że czynią mu zadość zarówno kąty φ i ω, jak i ich spełnienia $180^0 - \varphi$ oraz $180^0 - \omega$. Jeżeli kąty φ i ω są tego rodzaju, że $\varphi + \omega < 180^0$, możemy uważać je za kąty trójkąta, w którym dwa boki równają się *am* i *bn*; jeżeli zaś, jak na rys. 85, mamy $\varphi + \omega > 180^0$, możemy rozważać trójkąt, którego kątami są ich spełnienia.

Zadanie tedy sprowadziliśmy do następującego

Zadania pomocniczego: *Zbudować trójkąt, mając dane dwa jego boki* am, bn *oraz kąt między niemi zawarty* $= 180^0 - (\varphi + \omega)$ *czyli* $= 90^0 - \alpha$.

Rozwiązanie nasze nie obejmuje przypadku, gdy $\alpha = 90^0$ (dlaczego?) Ale wtedy mamy z równania (2)

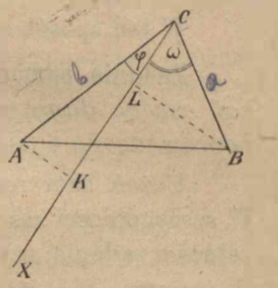
$$\frac{am}{bn} = \frac{\sin\omega}{\sin(180^0 - \omega)} = 1.$$

Zadanie jest w tym wypadku albo niemożliwe $\left(\text{jeżeli } \frac{a}{b} \neq \frac{n}{m}\right)$, albo nieoznaczone (dlaczego?).

Zadanie III *Dany jest trójkąt* ABC. *Wykreślić prostą* CX *w taki sposób, żeby iloczyn prostopadłych, poprowadzonych z* A *i z* B *do tej prostej, równał się danej liczbie* k^2.

Niech figura na rys. 86 odpowiada warunkom zadania, tak iż

$$AK \, . \, BL = k^2.$$



Rys. 86.

Oznaczmy kąty $\sphericalangle ACX$, $\sphericalangle BCX$ odpowiednio przez φ i ω.

Ponieważ

$$AK = b \sin \varphi, \quad BL = a \sin \omega,$$

zatem zadanie nasze sprowadza się do rozwiązania układu równań

$$\varphi + \omega = C \qquad (1)$$
$$ab \sin \varphi \sin \omega = k^2 \qquad (2)$$

Rozwiązanie tego układu nie przedstawia trudności. Jakoż równanie (2) możemy napisać w postaci

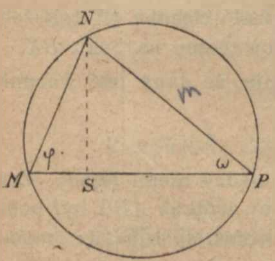
$$\sin \varphi \sin \omega = \frac{k^2}{ab}$$

czyli
$$\cos(\varphi + \omega) - \cos(\varphi - \omega) = -\frac{2k^2}{ab}$$

albo
$$\cos(\varphi - \omega) = \frac{2k^2}{ab} + \cos C.$$

Z ostatniego równania i z równania (1) możemy obliczyć kąty φ i ω.

W danym jednak razie analityczne rozwiązanie układu nie jest potrzebne. Istotnie, jeżeli w trójkącie MNP (rys. 87) mamy $M = \varphi$, $P = \omega$ i i jeżeli jest $NS \perp MP$, wówczas musi być



Rys. 87.

$$m = 2R \sin \varphi$$
$$NS = m \sin \omega$$
$$= 2R \sin \varphi \sin \omega \qquad (3)$$

Jeżeli równaniu (2) nadamy postać

$$b \sin \varphi \sin \omega = \frac{k^2}{a}, \qquad (2')$$

wówczas, porównywając z sobą równości (2′) i (3), dojdziemy do

wniosku, że φ i ω są to kąty trójkąta, wpisanego w koło o średnicy $= b$, przyczem wysokość, poprowadzona w trzecim kącie trójkąta, równa się $\frac{k^2}{a}$.

W ten sposób zadanie nasze sprowadziliśmy do

Zadania pomocniczego: *W koło o średnicy* b *wpisać trójkąt, mając dany jego kąt* $\alpha\,[=180^0-(\varphi+\omega)]$ *oraz wysokość, poprowadzoną z wierzchołka tego kąta.*

Uczeń sam rozwiąże to zadanie i zbada liczbę rozwiązań. W szczególności zaś wyznaczy dwoma sposobami warunek rozwiązalności zadania: czysto geometrycznie i analitycznie.

Ćwiczenia XXII. 1. Z wierzchołka C trójkąta ABC poprowadzić prostą, tak, by było $BL = CK$, gdzie K i L są spodkami prostopadłych, poprowadzonych do tej prostej z wierzchołków A i B.

2. Z punktu A poprowadzono do koła styczne AS, AS'. Na mniejszym z dwóch łuków SS' znaleźć taki punkt X, żeby było $SQ : S'Q' = m : n$, gdzie m i n są to liczby (lub odcinki) dane, punkty zaś Q i Q' są spodkami prostopadłych, poprowadzonych z X odpowiednio do stycznych AS i AS'.

3. Dane są dwie równoległe i punkt A między niemi. Przez A poprowadzić dwie proste, z których jedna przecięłaby równoległe w punktach B i B', druga zaś odpowiednio w punktach C i C', przyczem ma być spełniony warunek: $BB' + CC' = m$, gdzie m jest odcinkiem danym.

4. Rozwiązać poprzednie zadanie w przypuszczeniu, że dany jest warunek: $BB' \,.\, CC' = k^2$, gdzie k^2 jest daną liczbą.

5. Zbudować trójkąt, mając dany kąt C oraz odcinki $AW = m$, $BW = n$, gdzie W jest środkiem koła wpisanego. Podać dwa rozwiązania: czysto geometryczne i analityczne.

6. Zbudować trójkąt, mając dany promień R koła opisanego i odległości środka tego koła od dwóch boków trójkąta.

7. Zbudować trójkąt, mając dany kąt C i odległości m, n środka koła opisanego od dwóch boków trójkąta.

8. W kole dana jest cięciwa AB. Poprowadzić cięciwę AX tak, żeby trójkąt ABX był równoważny kwadratowi, zbudowanemu na boku BX.

9. Rozwiązać zadanie III (§ 71) w założeniu, że dany jest warunek

$$\frac{AK \cdot CL}{CK \cdot BL} = \frac{m}{n}.$$

10. Dane są dwie równoległe i punkt A, między niemi leżący. Znaleźć na równoległych takie dwa punkty B, C, żeby trójkąt ABC był podobny do trójkąta danego. Rozwiązać zadanie dwoma sposobami: geometrycznie i analitycznie.

11. Rozwiązać poprzednie zadanie w założeniu, że trójkąt ABC ma mieć dane pole S.

12. Przez punkt A przecięcia się dwóch danych kół $(O)\,r$ i $(O)'\,r'$ poprowadzić prostą tak, by iloczyn odcinków $AX \cdot AX'$, wyznaczonych na niej przez te koła, równał się danej liczbie m^2.

13. Rozwiązać zadanie II (§ 71) w założeniu, że prostokąt ma mieć dane pole.

14. Dane jest koło i w niem cięciwa AB. Poprowadzić promień OX tak, żeby było $XY = DY$, gdzie D jest środkiem cięciwy AB, punkt zaś Y jest punktem przecięcia się promienia OX z tą cięciwą.

15. Rozwiązać poprzednie zadanie w założeniu, że

$$CY : XY = AY : YD.$$

16. Dany jest trójkąt ABC wpisany w koło. Wysokość CD przecina okrąg w punkcie E. Poprowadzić przez E cięciwę EF, którąby przecięła boki AB, BC w takich punktach X, Y, że $XY = YF$, [Wskazówka: kąt $\sphericalangle\, CXE$ obrać jako niewiadomą].

17. Dany jest wycinek kątowy AOB, w którym $\sphericalangle\, AOB = \alpha$. Poprowadzić sieczną równoległą do promienia OA tak, żeby promień OB, cięciwa AB i łuk AB podzieliły tę sieczną na połowy. Jak wielki musi być kąt α żeby zadanie było możliwe?

(*Egzamin ustny do szkoły wojskowej w Saint-Cyr*).

18. Obliczyć kąty trójkąta, wiedząc, że tworzą one postęp arytmetyczny i że największy bok c jest dwa razy większy od najmniejszego boku a.

•19. Rozwiązać trójkąt ABC, mając dany kąt A oraz stosunek $= k$ dwóch wysokości, poprowadzonych z wierzchołków B i C.

20. Wyrazić obwód prostokąta w zależności od jego przekątnej i kąta x między bokiem a przekątną. Zbadać, jak zmienia się obwód, gdy przy stałej przekątnej zmieniamy kąt x; w szczególności znaleźć maximum obwodu.

21. Bierzemy pod uwagę wszystkie trójkąty ABC mające tę własność, że wysokość $AA' = \frac{1}{2}\,BC$. 1) Jaka zależność istnieje między tangensami kątów B i C? 2) Obliczyć kąty B i C w założeniu, że kąt A jest dany Przedyskutować. Zbadać przypadek szczególny, gdy $\operatorname{tg} A = 2$. 3) Zakładając, że $B = 2C$, obliczyć tangensy wszystkich kątów trójkąta.

(*Egzamin baccalauréat w Paryżu*).

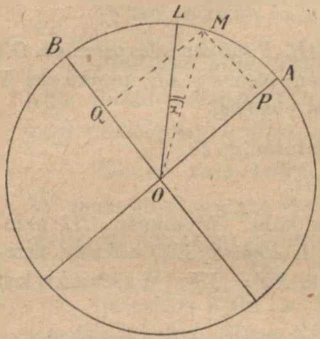
Przykłady zastosowania wzorów trygonometrycznych i dyskusji zagadnień.

§ **72**. **Zadanie I**. *Dane jest koło oraz dwie proste* OA, OB *przechodzące przez jego środek. Znaleźć na łuku* AB *taki punkt* M, *żeby było*

$$MP^2 + MQ^2 = l^2,$$

gdzie MP, MQ *są to prostopadłe do* OA *i* OB, *a* l *jest odcinkiem danym. Zbadać rozwiązanie.*

[Egzamin dojrzałości (baccalauréat) w Paryżu].



Rys. 88.

Oznaczmy przez r promień koła i niech będzie $\sphericalangle AOB = 2\alpha$. Jeżeli OL jest dwusieczną tego kąta, wówczas punkt M będzie w zupełności wyznaczony, o ile będziemy znali kąt $\sphericalangle LOM = x$.

Sens naszego zdania jest następujący:

Pomiędzy kątem x *a liczbą* l^2 *istnieje pewna zależność; trzeba: po pierwsze, znaleźć tę zależność; po wtóre, zbadać ją; po trzecie, wskazać konstrukcję, zapomocą której można byłoby wyznaczyć punkt* M *na łuku* AB.

Zaczniemy od pytania pierwszego.

Ponieważ
$$MP = r \sin(\alpha - x),$$
$$MQ = r \sin(\alpha + x),$$
zatem
$$r^2 \sin^2(\alpha - x) + r^2 \sin^2(\alpha + x) = l^2$$
czyli
$$\sin^2(\alpha + x) + \sin^2(\alpha - x) = \frac{l^2}{r^2} \tag{1}$$

Lewą część równania (1) możemy przekształcić tak, by wyodrębnić funkcje kąta x; np. w sposób następujący:

$$\sin^2(\alpha - x) + \sin^2(\alpha + x) = \sin^2(\alpha - x) - \cos^2(\alpha + x) + 1$$
$$= [\sin(\alpha - x) + \cos(\alpha + x)]\,[\sin(\alpha - x) - \cos(\alpha + x)] + 1$$
$$= [\sin(\alpha - x) + \sin(90^0 - \alpha - x)]\,[\sin(\alpha - x) - \sin(90^0 - \alpha - x)] + 1$$
$$= -\sin(90^0 - 2x) . \sin(90^0 - 2\alpha) + 1$$
$$= -\cos 2x . \cos 2\alpha + 1.$$

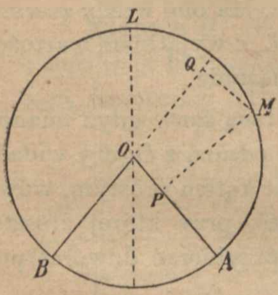
Wobec tego równanie (1) możemy napisać w postaci

$$\cos 2\alpha . \cos 2x - 1 = -\frac{l^2}{r^2} \tag{1'}$$

W ten sposób znaleźliśmy prosty związek między kątem x a liczbą l^2 czyli rozwiązaliśmy pytanie pierwsze. Co się tyczy pytania drugiego, t. j. badania tego związku, to zauważmy najpierw, że dwusieczna OL jest osią symetrji figury, wobec czego wystarczy zbadać zmiany kąta x w przedziale od 0^0 do α. Istotnie, jeśli jakiś punkt M na łuku LA odpowiada warunkom zadania, to na łuku LB

istnieje napewno taki punkt M' (symetryczny z M względem osi OL), który również czyni zadość tym warunkom. Tak więc zadanie, o ile wogóle posiada rozwiązania, ma ich zawsze liczbę parzystą, z wyjątkiem jednego tylko przypadku, gdy M zlewa się z L czyli gdy $x = 0^0$.

Następnie zauważmy, że bez ujmy dla ogólności rozumowania mamy prawo założyć, iż kąt 2α nie jest większy od 180^0 (patrz rys. 89), a więc iż $x \leqslant 90^0$. Wobec tego z równania (1'), mając dane r, l, $\cos 2\alpha$, otrzymamy zawsze tylko jedną wartość na x. Możemy tedy twierdzić, że zadanie nasze posiada zawsze conajwyżej dwie odpowiedzi.



Rys. 89.

Szczegółowe badanie polega na rozwiązaniu następującego pytania: przy jakich wartościach zmiennej l^2 zadanie posiada rozwiązania, czyli *jakim wartościom* l^2 *odpowiadają wartości kąta* x *zawarte w przedziale od* 0^0 *do* α? Zgóry przewidujemy, że te wartości zmiennej l^2 mogą być zależne od parametru zmiennego $\cos 2\alpha$.

Aby na powyższe pytanie odpowiedzieć, mamy do wyboru dwie drogi:

1) możemy uważać l^2 za zmienną niezależną, kąt x za jej funkcję;

2) ale też możemy, odwrotnie, uważać x za zmienną niezależną, a l^2 za funkcję, przyczem — jak widać z równania (1') — każdej wartości x odpowiada jedna i tylko jedna wartość l^2.

Pierwszy sposób badania.

Z równania (1') mamy

$$\cos 2x = \frac{r^2 - l^2}{r^2 \cos 2\alpha} \qquad (2)$$

Mówiliśmy już, że $0^0 \leqslant x \leqslant \alpha$ czyli $0^0 \leqslant 2x \leqslant 2\alpha$. Wynika stąd, że, jakikolwiek byłby kąt 2α w przedziale od 0^0 do 180^0, zawsze zachodzi nierówność

$$\cos 2\alpha \leqslant \cos 2x \leqslant 1 \qquad (3)$$

czyli

$$\cos 2\alpha \leqslant \frac{r^2 - l^2}{r^2 \cos 2\alpha} \leqslant 1 \qquad (3')$$

Podwójna ta nierówność wyraża warunek rozwiązalności zadania. Musimy tu odróżnić trzy przypadki.

I. Jeżeli $0^\circ < 2\alpha < 90^\circ$, to $\cos 2\alpha > 0$ i z nierówności (3′) otrzymujemy

$$r^2 \cos^2 2\alpha \leqslant r^2 - l^2 \leqslant r^2 \cos 2\alpha$$

czyli

$$r^2 \sin^2 2\alpha \geqslant l^2 \geqslant 2r^2 \sin^2 \alpha \qquad (4)$$

Taki jest (przy ostrym kącie 2α) przedział zmienności dla l^2, przy którym zadanie jest możliwe do rozwiązania. Ma ono wtedy zawsze dwa rozwiązania symetryczne względem OL, z wyjątkiem wartości $l^2 = 2r^2 \sin^2 \alpha$, która daje tylko jedno rozwiązanie.

II. Jeżeli $2\alpha = 90^\circ$, nierówności (3′) tracą sens, gdyż mianownik nigdy nie może być zerem, ale wtedy odrazu z figury widać, że $MP^2 + MQ^2 = l^2 = r^2$. Jeśli więc 2α jest kątem prostym, wówczas na l^2 możemy wziąć tylko jedną wartość, przy której zresztą zadanie jest nieoznaczone: punkt M może przybierać dowolne położenia na łuku ALB.

III. Jeżeli $90^\circ < 2\alpha < 180^\circ$, to $\cos 2\alpha < 0$ i z nierówności (3′) otrzymujemy kolejno

$$r^2 \cos^2 2\alpha \geqslant r^2 - l^2 \geqslant r^2 \cos 2\alpha$$

czyli

$$r^2 \sin^2 2\alpha \leqslant l^2 \leqslant 2r^2 \sin^2 \alpha \qquad (5)$$

Wnioski te same, co w przypadku I.

Drugi sposób badania.

Z równania (1′) mamy

$$l^2 = r^2 (1 - \cos 2\alpha . \cos 2x) \qquad (6)$$

I znów odróżniamy trzy przypadki.

I. Jeżeli $0^\circ < 2\alpha < 90^\circ$ czyli $\cos 2\alpha > 0$, wtedy l^2 stale rośnie od wartości $2r^2 \sin^2 \alpha$ do wartości $r^2 \sin^2 2\alpha$ (włączając krańce tego przedziału), gdy $2x$ rośnie od 0° do 2α. Wnioski jak poprzednio.

II. Jeżeli $2\alpha = 90^\circ$, to $l^2 = r^2$.

III. Jeżeli $90^\circ < 2\alpha \leqslant 180^\circ$, to $\cos 2\alpha < 0$, a wtedy l^2 stale maleje od $2r^2 \sin^2 \alpha$ do r^2, gdy $2x$ rośnie od 0° do 90° (gdyż wtedy $\cos 2x > 0$); $l^2 = r^2$ przy $2x = 90^\circ$; l^2 stale maleje od r^2 do $r^2 \sin^2 2\alpha$, gdy $2x$ rośnie od 90° do 2α (gdyż wtedy $\cos 2x < 0$).

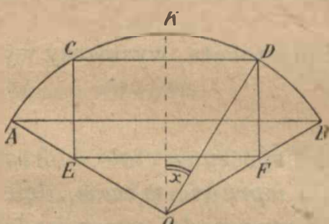
Jak widzimy, drugi sposób badania, choć pozornie okólny, okazał się prostszy i szybszy od pierwszego.

Co się tyczy konstrukcji kąta $2x$, to można ją wykonać rozmaitemi sposobami. Możemy np. napisać równanie (2) w postaci

$$\frac{r\cos 2\alpha}{r+l}=\frac{r\cos 2x}{r-l} \qquad (2')$$

i zbudować odcinek $r\cos 2x$ jako czwarty proporcjonalny do odcinków $r\cos 2\alpha$, $r+l$, $r-l$, a stąd — mając dany odcinek r, znajdziemy odrazu kąt $2x$.

Zadanie II. *W dany wycinek kołowy* AOB *wpisać prostokąt o możliwie największem polu tak, by dwa jego boki były równoległe do cięciwy* AB.



Rys. 90.

Oznaczmy promień koła przez r i niech będzie $\sphericalangle AOB=2\alpha$. Wykreślmy oś symetrji figury czyli dwusieczną OK. Prostokąt zbudujemy z łatwością, jeżeli będziemy znali położenie wierzchołka jego D, to zaś możemy wyznaczyć zapomocą kąta $\sphericalangle KOD=x$. Pole S prostokąta obliczymy z wzoru

$$S=CD\,.\,DF \qquad (1)$$

Ponieważ $\qquad CD=2r\sin x,$

a z $\triangle DOF$ wynika, że $\sphericalangle DFO=180^0-\alpha$, oraz że

$$\frac{DF}{\sin(\alpha-x)}=\frac{r}{\sin(180^0-\alpha)}$$

czyli

$$DF=\frac{r\sin(\alpha-x)}{\sin\alpha},$$

zatem

$$S=\frac{2r^2\sin x\sin(\alpha-x)}{\sin\alpha} \qquad (2)$$

Zmiany pola prostokąta zależą wyłącznie od iloczynu

$$\sin x\,.\,\sin(\alpha-x).$$

Zmiany te łatwiej będzie badać, jeżeli uda się wyrazić pole jako prostszą funkcję jednej zmiennej. W tym celu iloczyn przekształcimy na sumę dwóch funkcyj. Jakoż wzór (2) napisać możemy w postaci

$$S=\frac{r^2}{\sin\alpha}\,.\,2\sin x\,.\,\sin(\alpha-x)$$

$$=\frac{r^2}{\sin\alpha}\left[\cos(2x-\alpha)-\cos\alpha\right]. \qquad (2')$$

W ten sposób uzależniliśmy pole od jednej tylko zmiennej, mianowicie od $\cos(2x-\alpha)$.

Gdy x rośnie od 0^0 do $\frac{\alpha}{2}$, to $\cos(2x-\alpha)$ rośnie od wartości $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ do 1, pole zaś S rośnie od zera do wartości $r^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, gdy x rośnie od $\frac{\alpha}{2}$ do α, to $\cos(2x-\alpha)$ maleje do 1 do $\cos\alpha$, pole zaś S maleje od $r^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ do zera.

Tak więc pole osiąga największą wartość

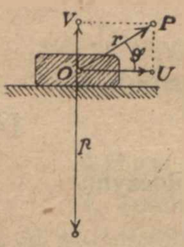
$$S = r^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

przy

$$x = \frac{\alpha}{2}.$$

Chcąc tedy znaleźć wierzchołek D prostokąta, wystarczy wykreślić dwusieczną kąta $\sphericalangle BOK$.

Zadanie III. *Na podstawie poziomej spoczywa ciało, którego ciężar równa się* p *dynom. Chcąc ciało wprawić w ruch, działamy na nie siłą* r *dyn, której kierunek przechodzi przez środek ciężkości ciała i która jest nachylona do płaszczyzny poziomej pod kątem* φ. *Zakładając, że spółczynnik tarcia (statycznego) jest* f, *znaleźć, jak wielka siła* r *wystarcza do wprawienia ciała w ruch i jaki jest najdogodniejszy kierunek działania siły.*



Rys. 91.

Niech wektor OP wyobraża siłę r. Rozkładając go na składową poziomą OU i pionową OV, mamy

$$OU = r\cos\varphi, \quad OV = r\sin\varphi.$$

Składowa pionowa przeciwdziała sile ciężkości, zmniejsza więc parcie ciała na podstawę, tak, iż parcie wynosi (przy działaniu siły r) tylko

$$p - r\sin\varphi \text{ dyn.}$$

Chcemy, żeby składowa pozioma zrównoważyła siłę tarcia, która, jak wiemy z fizyki, jest wprost proporcjonalna do parcia, wywieranego przez ciało na podstawę, czyli w naszym przypadku równa się

$$f(p - r\sin\varphi) \text{ dynom.}$$

Wobec tego musi zachodzić równanie

$$r\cos\varphi = f(p - r\sin\varphi),$$

skąd

$$r = \frac{fp}{\cos\varphi + f\sin\varphi} \tag{1}$$

O ile siła r przekroczy tę wartość, ciało zostanie wprawione w ruch.

Chcąc wyznaczyć najdogodniejszy kierunek działania siły, musimy znaleźć minimum funkcji (1). Otóż f i p są stałe, zatem siła r jest funkcją jednej tylko zmiennej φ i wyraża się ułamkiem o stałym liczniku i zmiennym mianowniku. Wobec tego r osiąga minimum wtedy, gdy mianownik ułamka czyli funkcja

$$y = \cos\varphi + f\sin\varphi$$

osiąga maximum.

W celu wyznaczenia tego maximum wprowadźmy kąt pomocniczy, a mianowicie połóżmy

$$f = \operatorname{tg}\omega.$$

Mamy wówczas
$$y = \frac{\cos(\omega - \varphi)}{\cos\omega} \qquad (2')$$

Ponieważ mianownik $\cos\omega$ jest stały, zatem y osiąga maximum wtedy, gdy
$$\omega - \varphi = 0^0 \qquad \text{(dlaczego?)}$$
czyli, gdy
$$f = \operatorname{tg}\varphi.$$

Zadanie IV. *Trójkąt prostokątny* ABC, *w którym* C $= 90^0$, *obraca się dokoła osi, równoległej do przeciwprostokątnej i odległej od niej o* $\frac{c}{2}$. *Oś obrotu i punkt* C *leżą po przeciwnych stronach boku* AB. *Zbadać, jak zmienia się objętość bryły obrotowej, jeżeli przeciwprostokątna* c *pozostaje stała, natomiast zmienia się kąt ostry* A *trójkąta. W szczególności zbadać, kiedy objętość ta osiąga największą lub najmniejszą wartość.*

Oznaczając wysokość CD przez h, objętość bryły obrotowej przez V, mamy

$$h = \frac{c\sin 2A}{2},$$

$$V = \frac{\pi c}{3}\left[\left(h + \frac{c}{2}\right)^2 + \frac{c^2}{4} + \frac{c}{2}\left(h + \frac{c}{2}\right)\right] - \frac{\pi c^3}{4}$$

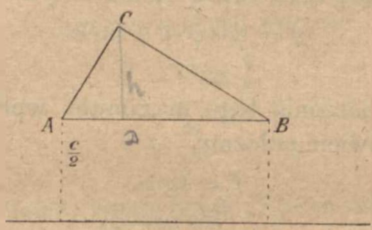
$$= \frac{\pi c}{3}\left[h^2 + \frac{3}{2}hc + \frac{3c^2}{4}\right] - \frac{\pi c^3}{4}$$

$$= \frac{\pi c}{12}\left[4h^2 + 6hc\right]$$

$$= \frac{\pi c^3}{12}\left[\sin^2 2A + 3\sin 2A\right].$$

Objętość V możemy uważać za funkcję kwadratową zmiennej sin 2 A, najwłaściwiej tedy będzie oznaczyć sin 2 A przez x, co da nam

$$V = \frac{\pi c^2}{12}(x^2 + 3x). \qquad (1)$$



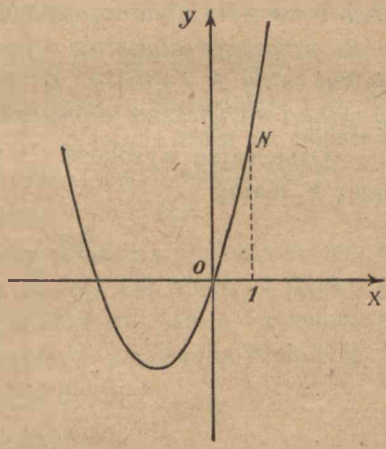
Rys. 92.

Ponieważ w zadaniu chodzi tylko o ogólny przebieg zmienności funkcji, nie zaś o obliczenie poszczególnych jej wartości, zatem wzór (1) zastąpić możemy przez prostszy

$$Y = X^2 + 3X \qquad (2)$$

Zarówno równanie (2), jak (1) jest równaniem paraboli. Chcąc jednak z obrazu paraboli wnosić o tem, jak zmienia się objętość, musimy dokładnie uprzytomnić sobie, w jaki sposób zmienia się X w równaniu (2).

Otóż, po pierwsze, X może w zadaniu naszem zmieniać się tylko od 0 do 1, gdyż w tych tylko granicach zmieniać się może sin 2A. Powtóre, ponieważ kąt A zmieniać się może tylko w przedziale od 0° do 90° z wyłączeniem krańców przedziału, zatem kąt 2A zmienia się w przedziale od 0° do 180° z wyłączeniem krańców przedziału, a wobec tego sin 2A (czyli X) rośnie najpierw od wartości dowolnie blizkich zera do 1, następnie zaś maleje znów do wartości dowolnie blizkich zera.



Rys. 93.

Jeśli więc rys. 93 wyobraża parabolę, odpowiadającą równaniu (2),

to tylko łuk ON tej paraboli odpowiada warunkom zadania i mianowicie w rozważanym przedziale funkcja

$$\sin^2 2A + 3\sin 2A$$

dwukrotnie kreśli ten łuk: raz od O do N, drugi raz od N do O, przyczem jednak nie dosięga nigdy punktu O, jakkolwiek może dowolnie zbliżyć się do niego.

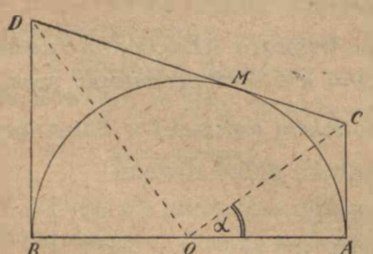
Jak widzimy, największą wartość osiąga ta funkcja wówczas, gdy $\sin 2A = 1$ czyli $A = 45^0$, natomiast wartość najmniejsza nie istnieje: funkcja przybierać może wartości dowolnie małe dodatnie.

Całe badanie dałoby się o wiele prościej przeprowadzić czysto geometrycznie: gdy A jest dowolnie blizkie zera, to samo powiedzieć można o wysokości h trójkąta, a więc i o objętości bryły; gdy A rośnie, wzrasta również wysokość i objętość, dopóki A nie stanie się równe 45^0; następnie wysokość zaczyna maleć i maleje niegraniczenie wraz z objętością bryły i z kątem B.

Zadanie V. *Dane jest półkole o średnicy* AB = 2r. *W dowolnym punkcie* M *półkola kreślimy styczną, która przecina odpowiednio w punktach* C *i* D *styczne, poprowadzone przez punkty* A *i* B. *Jak należy wykreślić pierwszą styczną, żeby objętość bryły, zakreślonej przez obrót trapezu* ABCD *dokoła* AB, *była* m *razy większa od objętości kuli, zakreślonej przez obrót półkola? Zbadać rozwiązanie.*

(*Egzamin dojrzałości w szkołach Warszawskich*).

Na pierwszy rzut oka zdawałoby się, że na niewiadomą należy obrać kąt $\sphericalangle AOM$. Jeżeli jednak przyjrzymy się figurze, dostrzeżemy odrazu, że, bez względu na położenie punktu M, kąt $\sphericalangle COD$ jest zawsze prosty.



Rys. 94.

Istotnie,

$$\sphericalangle BDC + \sphericalangle ACD = 180^0$$

(dlaczego?) a ponieważ OD i OC są dwusiecznemi tych kątów, zatem

$$\sphericalangle ODC + \sphericalangle OCD = 90^0$$
$$\sphericalangle DOC = 90^0.$$

Wobec tego łatwo jest przewidzieć, że rachunki uproszczą się, jeżeli jako niewiadomą obierzemy $\sphericalangle AOC = \alpha$.

Mamy wtedy bezpośrednio z warunków zadania

$$\frac{m\,4\pi r^3}{3} = \frac{2\pi r}{3}\,[AC^2 + BD^2 + AC \,.\, BD]$$

czyli $$2m = \mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\alpha + 1,$$

skąd $$\mathrm{tg}^4\alpha - (2m - 1)\,\mathrm{tg}^2\alpha + 1 = 0 \qquad (1)$$

Kładąc w równaniu tem $\mathrm{tg}^2\alpha = x$, otrzymamy

$$x^2 - (2m - 1)\,x + 1 = 0 \qquad (2)$$

Ponieważ z zadania wynika, że musi być

$$0^0 < \alpha < 90^0 \qquad (3)$$

zatem warunkom zadania mogą czynić zadość dowolne wartości na x, byle tylko dodatnie (dlaczego?)

Warunkiem rozwiązalności równania (2) jest

$$\triangle = (2m - 1)^2 - 4$$
$$= (2m + 1)\,(2m - 3) \geqslant 0,$$

skąd $$m \leqslant -\tfrac{1}{2} \quad \text{albo też } m \geqslant \tfrac{3}{2}.$$

Liczba m z natury rzeczy musi być dodatnia, zatem jeden tylko warunek rozwiązalności równania odpowiada warunkom zadania, a mianowicie musi być

$$m \geqslant \tfrac{3}{2} \qquad (4)$$

O ile warunek (4) jest spełniony, równanie (2) ma pierwiastki dodatnie, a mianowicie

równanie ma 2 pierwiastki dodatnie, jeżeli $m > \frac{3}{2}$,
" " 1 pierwiastek " (podwójny), jeżli $m = \frac{3}{2}$.

Tak więc przy $m > \frac{3}{2}$ na $\mathrm{tg}^2\alpha$ otrzymujemy dwie odpowiedzi dodatnie, a każda z nich daje wobec warunku (3) po jednej odpowiedzi na $\mathrm{tg}\,\alpha$ i na kąt α.

Jeżeli $m = \frac{3}{2}$, wówczas $\mathrm{tg}^2\alpha = 1$ i $\alpha = 45^0$.

Zadanie VI. *Obliczyć boki* b, c *trójkąta* ABC, *mając dane: bok* a, *kąt* A *oraz iloczyn* b (b + c) = k². *Przeprowadzić szczegółowe badanie* *(Egzamin wstępny do szkoły wojskowej w Saint Cyr).*

Z warunków zadania wynika odrazu układ równań

$$b\,(b + c) = k^2 \qquad (1)$$
$$b^2 + c^2 - 2\,bc\cos A = a^2 \qquad (2)$$

w którym niewiadomemi są b i c.

Z równania (1) znajdujemy, że

$$bc = k^2 - b^2, \qquad c = \frac{k^2 - b^2}{b}.$$

wstawiając zaś te wartości do równania (2), mamy

$$b^2 + \frac{(k^2-b^2)^2}{b^2} - 2(k^2-b^2)\cos A - a^2 = 0\,,$$

a mnożąc przez b^2, otrzymujemy

$$2b^4(1+\cos A) - b^2(a^2+2k^2+2k^2\cos A) + k^4 = 0$$

czyli

$$4b^4\cos^2\frac{A}{2} - b^2\left(a^2+4k^2\cos^2\frac{A}{2}\right) + k^4 = 0 \qquad (3)$$

Aby równanie to było rozwiązalne, trzeba i wystarcza, żeby wyróżnik jego nie był ujemny. Mamy więc

$$\triangle = \left(a^2+4k^2\cos^2\frac{A}{2}\right)^2 - 16k^4\cos^2\frac{A}{2}$$

$$=\left(a^2+4k^2\cos^2\frac{A}{2}+4k^2\cos\frac{A}{2}\right)\left(a^2+4k^2\cos^2\frac{A}{2}-4k^2\cos\frac{A}{2}\right) \geqslant 0.$$

Pierwszy z tych dwóch czynników jest zawsze dodatni, pozostaje tedy jedna nierówność, która musi być spełniona, mianowicie

$$a^2 - 4k^2\cos\frac{A}{2}\left(1-\cos\frac{A}{2}\right) \geqslant 0$$

czyli

$$a^2 \geqslant 8k^2\cos\frac{A}{2}\sin^2\frac{A}{4} \qquad (4)$$

Jeżeli pierwiastki równania (3) mają czynić zadość warunkom zadania, trzeba, żeby było $b^2>0$ oraz $c>0$. Ale z równania $c=\frac{k^2-b^2}{b}$ wynika, że w takim razie musi być $b^2<k^2$. Tak więc ostatecznie musi być

$$0 < b^2 < k^2 \qquad (5)$$

Otóż pierwszy warunek ($b^2>0$) jest zawsze spełniony przez równanie (3), o ile tylko spełniony jest warunek (4), czyli jeżeli to równanie posiada wogóle pierwiastki. Istotnie, zarówno suma jak iloczyn pierwiastków równania (3) są dodatnie.

Co się tyczy drugiego warunku ($b^2<k^2$), to powiada on innemi słowami, że jeżeli punkty zerowe paraboli

$$y = 4x^2\cos\frac{A}{2} - x\left(a^2+4k^2\cos^2\frac{A}{2}\right) + k^4 \qquad (6)$$

czyli punkty jej przecięcia się z osią x-ów mają czynić zadość warunkom zadania, muszą one leżeć w lewo od punktu $(k^2, 0)$. Jeśli tedy przesuniemy osie spółrzędnych równolegle do punktu $(k^2, 0)$ czyli z równania (6) otrzymamy równanie przekształcone

$$y = 4X^2\cos^2\frac{A}{2} - X\left(a^2-4k^2\cos^2\frac{A}{2}\right) + k^2(k^2-a^2) \qquad (7)$$

to dojdziemy do wniosku, że

parabola (7) przecina oś x-ów raz jeden w lewo od nowego punktu zerowego, t. j. parabola (6) przecina raz jeden tę oś w lewo od punktu $(k^2, 0)$, jeżeli mamy $k^2 < a^2$; zadanie nasze ma wtedy 1 rozwiązanie;

parabola (7) przecina oś x-ów dwa razy w lewo od nowego punktu zerowego, t. j. parabola (6) przecina tę oś dwa razy w lewo od punktu $(k^2, 0)$, jeżeli mamy jednocześnie

$$k^2 > a^2 \text{ oraz } a^2 < 4k^2 \cos^2 \frac{A}{2} \text{ czyli}$$

$$k^2 > \frac{a^2}{4\cos^2 \frac{A}{2}}\text{; zadanie ma wówczas 2 rozwiązania;}$$

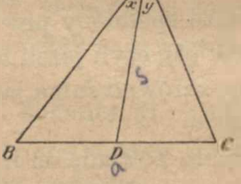
parabola (7) nie przecina osi x-ów w żadnym punkcie leżącym w lewo od punktu zerowego,

jeżeli mamy jednocześnie

$$k^2 > a^2 \quad \text{oraz} \quad k^2 < \frac{a^2}{4\cos^2 \frac{A}{2}};$$

zadanie nasze nie ma wtedy rozwiązań.

Zadanie VII. *Zbudować i rozwiązać trójkąt* ABC, *mając dane: bok* a, *kąt* A *i środkową* s, *poprowadzoną do boku* a. *Zbadać rozwiązanie.* (*Egzamin dojrzałości w Poitiers*).



Rys. 95.

Na mocy znanego twierdzenia o sumie kwadratów boków równoległoboku mamy

$$4s^2 + a^2 = 2(b^2 + c^2),$$

stosując zaś wzór kosinusów, otrzymujemy:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Równania te możemy napisać w postaci następującej:

$$b^2 + c^2 = \frac{4s^2 + a^2}{2} \qquad (1)$$

$$2bc = \frac{4s^2 - a^2}{2\cos A} \qquad (2)$$

Z układu tego wynika, że

$$(b+c)^2 = \frac{4s^2 + a^2}{2} + \frac{4s^2 - a^2}{2\cos A} \qquad (3)$$

$$(b-c)^2 = \frac{4s^2 + a^2}{2} - \frac{4s^2 - a^2}{2\cos A} \qquad (4).$$

Z równań (3) i (4) potrafimy obliczyć boki b i c, wolno tedy uważać trójkąt za rozwiązany. Możemy przystąpić do dyskusji.

Równania (3) i (4) mają sens tylko wtedy, gdy $\cos A \neq 0$ czyli gdy $A \neq 90^0$. Załóżmy, że warunek ten jest spełniony; później rozważymy przypadek, gdy $A = 90^0$.

Równania nasze posiadają rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy prawe ich części nie są liczbami ujemnemi (dlaczego?)

I. Jeżeli $A < 90^0$, t j. $\cos A > 0$, to równanie (2) może odpowiadać treści geometrycznej zadania tylko pod warunkiem, że $4s^2 - a^2 > 0$, gdyż tylko wtedy b i c mogą być liczbami dodatniemi. Ale w takim razie prawa część równania (3) jest liczbą dodatnią i pozostaje do zbadania tylko jedna nierówność

$$\frac{4s^2 + a^2}{2} - \frac{4s^2 - a^2}{2\cos A} \geqslant 0 \tag{5}$$

czyli

$$\frac{4s^2(\cos A - 1) + a^2(\cos A + 1)}{2\cos A} \geqslant 0$$

Zgodnie z założeniem, mianownik części lewej jest dodatni, zatem nierówność sprowadza się do prostej postaci

$$4s^2(\cos A - 1) + a^2(\cos A + 1) \geqslant 0 \tag{5'}$$

czyli

$$\frac{4s^2}{a^2} \leqslant \frac{1 + \cos A}{1 - \cos A}$$

albo

$$\frac{4s^2}{a^2} \leqslant \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2} \tag{5''}$$

II. Jeżeli $A > 90^0$ czyli $\cos A < 0$, wówczas z równania (2) w taki sam sposób wynika, że musi być $4s^2 - a^2 < 0$. I znów prawa część równania (3) jest liczbą dodatnią, tak iż znów mamy do rozwiązania tylko nierówność (5). Ale teraz, zważywszy poczynione założenia, mamy

$$4s^2(\cos A - 1) + a^2(\cos A + 1) \leqslant 0 \tag{6}$$

$$\frac{4s^2}{a^2} \geqslant \frac{1 + \cos A}{1 - \cos A} \tag{6'}$$

$$\frac{4s^2}{a^2} \geqslant \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2} \tag{6''}$$

Widzimy, że

przy $A < 90^0$ musi być $1 < \frac{4s^2}{a^2} \leqslant \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2}$

„ $A > 90^0$ „ „ $\operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2} \leqslant \frac{4s^2}{a^2} < 1$.

a ponieważ s, a i $\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$ są liczbami dodatniemi, zatem wyniki dotychczasowej dyskusji można ująć w formę następującą:

$$\text{przy } A < 90^0 \text{ musi być } \frac{a}{2} < s \leqslant \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{A}{2} \qquad (7)$$

$$\text{„ } A > 90^0 \text{ „ „ } \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{A}{2} \leqslant s < \frac{a}{2} \qquad (8)$$

Zauważmy jeszcze, że równania (3) i (4), jak również pierwotne równania (1) i (2) są symetryczne względem b i c; to znaczy, że jeżeli czyni im zadość pewien układ wartości

$$b = k, \quad c = l,$$

to musi im również czynić zadość układ następujący:

$$c = k, \quad b = l.$$

Z tego spostrzeżenia wynika, że jeśli spełnione są nierówności (7) i (8), to zadanie nasze posiada dwa rozwiązania, t. j. dają się zbudować dwa trójkąty, odpowiadające warunkom zadania, zresztą trójkąty te są symetryczne (względem jakiej osi?). Wyjątek stanowi przypadek, gdy $s = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$; wtedy mamy tylko jedno rozwiązanie.

III. Jeżeli wreszcie $A = 90^0$, wówczas równania (3) i (4), jak mówiliśmy, tracą sens. Wiemy skądinąd, że w trójkącie prostokątnym musi być zawsze $s = \frac{a}{2}$; jeśli więc warunek ten nie jest spełniony, zadanie jest niemożliwe do rozwiązania, a jeśli jest spełniony, to zadanie jest nieoznaczone (dlaczego?).

Rozwiązanie geometryczne zadania jest oczywiste i wymaga tylko elementarnych wiadomości. Uczeń porówna powyższe wyniki badania z temi, które otrzymujemy na drodze czysto geometrycznej.

Zadanie VIII. *Rozważamy wszystkie trójkąty, mające spólną stałą podstawę i stały obwód. W którym z tych trójkątów kąt przeciwległy podstawie jest największy?*

Spólną podstawę oznaczmy przez a, dwa zaś zmienne boki trójkąta przez x i y. Ponieważ obwód ma być stały, zatem musi być również stała suma boków

$$x + y = m. \qquad (1)$$

Musimy znaleźć związek między bokami trójkąta i kątem A (zmiennym), przeciwległym podstawie. Mamy tedy

$$a^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos A. \qquad (2)$$

Równanie (2) możemy napisać w postaci

$$a^2 = (x+y)^2 - 2xy\,(1+\cos A)$$
$$= (x+y)^2 - 4xy\cos^2\frac{A}{2}.$$

uwzględniając zaś równanie (1), otrzymujemy stąd wartość na $\cos^2\frac{A}{2}$, mianowicie

$$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{m^2 - a^2}{4xy}. \tag{3}$$

Pamiętając, że im kąt ostry $\frac{A}{2}$ jest większy, tem mniejszy jest jego kosinus, a więc również $\cos^2\frac{A}{2}$, możemy powiedzieć, że zadanie polega na znalezieniu warunku, przy którym $\cos^2\frac{A}{2}$ osiąga minimum. Ale $\cos^2\frac{A}{2}$ wyraziliśmy w postaci ułamka o stałym liczniku i zmiennym mianowniku, zatem $\cos^2\frac{A}{2}$ osiągnie minimum wówczas, gdy mianownik $4xy$ lub, co na jedno wychodzi, gdy funkcja dwóch zmiennych

$$z = xy \tag{4}$$

osiągnie maximum.

Otóż z algebry wiemy, że j e ś l i x i y p r z y b i e r a j ą t y l k o w a r t o ś c i d o d a t n i e, wówczas funkcja ta osiąga maximum wtedy, gdy

$$x = y$$ [1].

Tak więc kąt $\frac{A}{2}$, a co za tem idzie i kąt A, osiąga maximum wtedy, gdy trójkąt staje się równoramiennym.

Zadanie IX. *Dany jest stożek kołowy prosty, którego promień podstawy* = r, *tworząca zaś jest nachylona do podstawy pod kątem* α. *W stożek wpisano walec prosty. Wyrazić pole powierzchni całkowitej walca jako funkcję promienia* x *jego podstawy i zbadać, jak zmienia się to pole, jeżeli przy stałem* r *zmieniamy w stożku kąt* α.

(*Egzamin do szkoły marynarki w Livorno*)

---

[1]) Gdyby kto nie znał tego twierdzenia, może je odrazu odczytać z tożsamości

$$4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2.$$

Z tej samej tożsamości wywnioskuje czytelnik, kiedy suma dwóch zmiennych dodatnich osiąga minimum, jeżeli iloczyn zmiennych ma stałą wartość.

Oznaczając wysokość walca przez z, pole jego powierzchni całkowitej przez y, mamy

$$y = 2\pi x^2 + 2\pi xz;$$

$$z = (r - x)\operatorname{tg}\alpha;$$

zatem $$y = 2\pi(1 - \operatorname{tg}\alpha).x^2 + 2\pi r \operatorname{tg}\alpha . x \qquad (1)$$

Widzimy, że pole y jest funkcją kwadratową zmiennej x, przyczem $\operatorname{tg}\alpha$ jest parametrem zmiennym. W naszem zadaniu możemy poprzestać na zmianach kąta α w przedziale od 0^0 do 90^0, z wyłączeniem krańców tego przedziału. Istotnie, przy $\alpha = 0^0$ lub $\alpha = 90^0$ stożek przestaje istnieć i zadanie traci sens; przy $90^0 < \alpha < 180^0$ otrzymujemy figurę symetryczną z poprzednią względem płaszczyzny podstawy stożka; przy $\alpha = 180^0$ stożek nie istnieje; przy $180^0 < \alpha < 270^0$ mamy tę samą figurę, co w przypadku, gdy $0^0 < \alpha < 90^0$, i t. d.

Przy stałej wartości kąta α obrazem funkcji (1) jest, wogóle biorąc, parabola w zupełności oznaczona; gdy zmieniamy kąt α, parabola zmienia kształt (staje się mniej lub więcej stromą) oraz położenie na płaszczyźnie[1]). W każdym jednak razie parabola ta przechodzi stale przez punkt zerowy (dlaczego?).

Chcąc zbadać przebieg zmienności funkcji (1), musimy odróżnić trzy przypadki, zależnie od tego, czy spółczynnik przy x^2 jest liczbą dodatnią, ujemną czy też zerem, a więc zależnie od tego, czy mamy

$$0 < \operatorname{tg}\alpha < 1, \quad \text{czy} \quad \operatorname{tg}\alpha = 1, \quad \text{czy wreszcie} \quad \operatorname{tg}\alpha > 1.$$

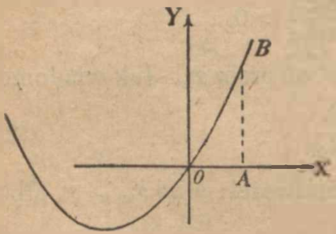
Przypadek I. Jeżeli $0 < \operatorname{tg}\alpha < 1$ (a więc kąt rozwarcia stożka jest większy od 90^0 a wysokość stożka jest mniejsza od r), wówczas w równaniu (1) spółczynnik przy x^2 jest dodatni. Wobec tego przy każdej wartości $\operatorname{tg}\alpha$, zawartej w przedziale od 0 do 1, obrazem funucji jest parabola, zwrócona wierzchołkiem na dół. Pierwiastkami (zerami) funkcji są liczby

$$x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{-r\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha} < 0$$

parabola tedy leży tak, jak na rys. 96.

[1]) Aby lepiej uświadomić sobie wpływ tego zmiennego parametru, uczeń powinien wykreślić obraz funkcji (1) przy jakiemś stałem r, np. przy $r = \frac{1}{2\pi}$, i przy dwóch lub trzech różnych wartościach kąta α, np. $\alpha = 20^0, 30^0, 40^0$.

Jeżeli nie chcemy uogólniać naszego zadania i termin „walec wpisany“ rozumiemy jako „walec, zawarty wewnątrz stożka i dotykający górną podstawą powierzchni bocznej stożka“, w takim razie uwzględniamy tylko te wartości x, które czynią zadość nierównościom



Rys. 96.

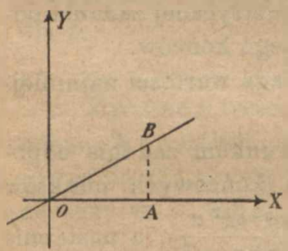
$$0 < x < r,$$

a wtedy warunkom zadania odpowiada tylko łuk OB paraboli w wyjątkiem punktów końcowych tego łuku [1]. Funkcja (1) w tym przedziale stale rośnie od wartości 0 (przy $x = 0$) do wartości $2\pi r^2$ (przy $x = r$); przyczem ta jej część, która odpowiada treści geometrycznej zadania, nie posiada ani najmniejszej wartości, ani największej.

Przypadek II. Jeżeli $\operatorname{tg} \alpha = 1$ (a więc kąt rozwarcia stożka jest prosty i wysokość stożka równa się r), wówczas funkcja nasza przybiera postaci

$$y = 2\pi rx,$$

zatem obrazem jej jest linja prosta. Znów jednak nie cała prosta odpowiada treści geometrycznej zadania, lecz tylko odcinek OB z wyłączeniem końców odcinka (rys. 97). Tak samo, jak w przypadku I, pole powierzchni całkowitej walca stale rośnie od 0 do $2\pi r^2$ (nie posiadając wartości najmniejszej ani największej), gdy promień x jego podstawy rośnie od 0 do r z wyłączeniem krańców przedziału.



Rys. 97.

Przypadek III. Jeżeli $\operatorname{tg} \alpha > 1$ (a więc kąt rozwarcia stożka jest ostry i wysokość stożka większa od r), wówczas w równaniu

$$y = 2\pi (1 - \operatorname{tg} \alpha) \, . \, x^2 + 2\pi r \operatorname{tg} \alpha \, . \, x \qquad (1)$$

spółczynnik przy x^2 jest liczbą ujemną. Obrazem funkcji jest para-

[1]) Uczeń może spróbować uogólnić zadanie, rozważając stożek dwupowłókowy i uważając za „wpisany“ każdy walec, którego dolna podstawa leży na podstawie stożka, górna zaś dotyka jednej lub drugiej powłoki stożka. Jaka część paraboli odpowiada wtedy zadaniu?

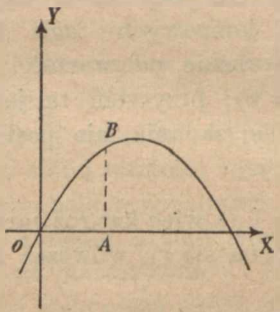
bola, zwrócona wierzchołkiem ku górze i przecinająca oś x-ów w punktach

$$x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{-r \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} > 0.$$

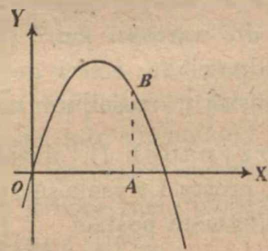
Oznaczmy odciętą wierzchołka paraboli przez x_w. Jak wiadomo

$$x_w = \frac{-r \operatorname{tg} \alpha}{2(1 - \operatorname{tg} \alpha)} \tag{2}$$

Teraz dadzą się pomyśleć dwie możliwości: albo $x_w \geqslant r$, albo też $x_w < r$. (rys. 98 i 99).



Rys. 98.



Rys. 99.

1) Jeżeli $x_w \geqslant r$ czyli $\operatorname{tg} \alpha \leqslant 2$, wówczas pole powierzchni walca stale rośnie od 0 do $2\pi r^2$; treści geometrycznej zadania odpowiada na rys. 98 łuk OB z wyłączeniem jego końców.

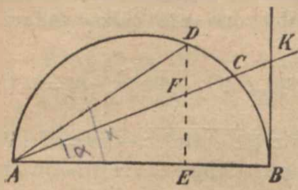
Pole, jak w przypadkach I i II, nie posiada wartości najmniejszej ani największej.

2) Jeżeli $x_w < r$ czyli $\operatorname{tg} \alpha > 2$, to warunkom zadania odpowiada łuk OB na rys. 99 z wyłączeniem końcowych punktów O i B. Pole rośnie od 0 do wartości $y_w = \frac{\pi r^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{2(\operatorname{tg} \alpha - 1)}$, a następnie maleje aż do wartości $2\pi r^2$, przyczem ta ostatnia wartość nie odpowiada już treści geometrycznej zadania.

W tym więc jedynym przypadku pole powierzchni całkowitej naszego walca posiada maximum.

Zadanie X. *Dane jest półkole o średnicy* AB = 2R. *Przez koniec* A *średnicy poprowadzono prostą, nachyloną do niej pod kątem* α *i przecinającą półkole w punkcie* C, *oraz cięciwę* AD. *Niech prostopadła, poprowadzona z* D *do średnicy, przecina w punkie* E *średnicę, w punkcie zaś* F *prostą* AC. *Jak wielki wi-*

nien być kąt $\sphericalangle$ BAD $=$ x, *aby suma odcinków* DE$+$FE *równała się danemu odcinkowi* m? (*Egzamin dojrzał. w okręgu warszawskim*).



Rys. 100.

Mamy $AE = 2R\cos^2 x$,
$FE = 2R \,.\, \mathrm{tg}\,\alpha \,.\, \cos^2 x$,
$DE = 2R\sin x\cos x$;

zatem

$$2R\,\mathrm{tg}\,\alpha \,.\, \cos^2 x + 2R\sin x\cos x = m \quad (1)$$

(Czy otrzymamy to samo równanie, jeżeli $x < \alpha$?)

Dyskusję, jak w zadaniu I (str. 151) przeprowadzimy dwoma sposobami: raz będziemy uważali liczbę m za zmienną niezależną, kąt zaś x za jej funkcję, drugi raz — odwrotnie — kąt x traktować będziemy jako zmienną niezależną, m zaś jako funkcję.

Sposób I. Aby rozwiązać równanie (1) względem x, zauważmy, że możemy je uczynić jednorodnem względem $\sin x$ i $\cos x$ (patrz str. 145), mnożąc m przez $\sin^2 x + \cos^2 x$.
Mamy tedy

$$2R\,\mathrm{tg}\,\alpha \,.\, \cos^2 x + 2R\sin x\cos x = m(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

skąd

$$m\,\mathrm{tg}^2 x - 2R \,.\, \mathrm{tg}\, x - (2R \,.\, \mathrm{tg}\,\alpha - m) = 0 \quad (2)$$

Z warunków zadania wynika, że musi być $m > 0$; wobec tego z wyróżnika możemy wysnuć następujący przedział zmienności dla m:

$$0 < m \leqslant R\,\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Zgodnie z treścią geometryczną zadania winno być $\mathrm{tg}\, x \geqslant 0$, zatem wszelkie pierwiastki dodatnie (ale tylko dodatnie) równania (2) czynią zadość warunkom zadania. Widać odrazu, że przy $m < 2R \,.\, \mathrm{tg}\,\alpha$ równanie (2) posiada tylko jeden pierwiastek dodatni, a ponieważ $2R \,.\, \mathrm{tg}\,\alpha < 2R\,\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$, o ile tylko $0^0 < \alpha < 90^0$, zatem

przy $0 < m < 2R\,\mathrm{tg}\,\alpha$ zadanie ma 1 rozwiązanie;

„ $m = 2R\,\mathrm{tg}\,\alpha$ „ „ 2 „
przyczem $x_1 = 0^0$, $x_2 > 0^0$;

„ $2R\,\mathrm{tg}\,\alpha < m < R\,\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$ „ ma 2 rozwiązania;
przyczem $x_1 > 0^0$; $x_2 > 0^0$;

„ $m = R\,\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$ „ ma 1 rozwiązanie (podwójne) t. j. $x_1 = x_2$.

Uwaga. Mogliśmy, rzecz prosta, rozwiązać równanie (1) inaczej, zastępując w niem $\cos x$ przez $\sqrt{1-\sin^2 x}$ i podnosząc równanie do kwadratu, ale otrzymane w ten sposób równanie dwukwadratowe względem $\sin x$ zawierałoby obce pierwiastki. Istotnie, odpowiadałoby ono nie tylko zadaniu

$$DE + EF = m$$

czyli równaniu $2R\operatorname{tg}\alpha - 2R\operatorname{tg}\alpha\sin^2 x + 2R\sin x\sqrt{1-\sin^2 x} - m = 0$. (1)
ale równie dobrze zadaniu $DE - EF = m$
czyli równaniu $-2R\operatorname{tg}\alpha + 2R\operatorname{tg}\alpha\sin^2 x + 2R\sin x\sqrt{1-\sin^2 x} - m = 0$ (1').

Ponieważ oddzielanie pierwiastków, odpowiadających równaniu (1), od tych, które odpowiadają równaniu (1'), byłoby bardzo kłopotliwe, *zatem wypadłoby dyskusję zadania prowadzić nie na równaniu dwukwadratowem, lecz na pierwotnem równaniu* (1)

Oznaczając symbolem $f(x)$ lewą część równania (1), mamy

$$f(0^0) = 2R\operatorname{tg}\alpha - m \quad ; \quad f(90^0) = -m,$$

zatem $\quad f(0^0) \, . \, f(90^0) < 0$, jeżeli $m < 2R\operatorname{tg}\alpha$,

natomiast $\quad f(0^0) \, . \, f(90^0) > 0$, jeżeli $m > 2R\operatorname{tg}\alpha$.

Ponieważ z wyróżnika równania dwukwadratowego i z warunku $m>0$ otrzymujemy ten sam przedział zmienności dla m, co poprzednio, zatem łatwo już jest wysnuć wnioski co do liczby rozwiązań.

S p o s ó b II. Uważamy m za funkcję kąta x, związaną z nim równaniem

$$2R\operatorname{tg}\alpha\cos^2 x + 2R\sin x \operatorname{sos} x = m \tag{4}$$

które możemy też napisać w postaci

$$2R\cos x\,(\operatorname{tg}\alpha\cos x + \sin x) = m$$

albo w postaci

$$\frac{2R \, . \cos x \, . \sin(\alpha + x)}{\cos\alpha} = m \tag{4'}$$

Aby ułatwić sobie badanie tej funkcji, możemy licznik przedstawić jako sumę dwóch sinusów. Jakoż mamy

$$\frac{R}{\cos\alpha}\left[\sin(\alpha + 2x) + \sin\alpha\right] = m \tag{4''}$$

Wiemy, że x zmieniać się może od 0^0 do 90^0, zatem $\alpha + 2x$ zmieniać się może od α do $180^0 + \alpha$.

Gdy $x = 0^0$, mamy $m = 2R\operatorname{tg}\alpha$; punkty D i E (rys. 100) zlewają się z B, natomiast F leży w punkcie K.

Gdy $\alpha + 2x$ rośnie od wartości α do 90^0, czyli gdy x rośnie od 0^0 do $45^0 - \frac{\alpha}{2}$, funkcja m stale rośnie.

Przy $x = 45^0 - \frac{\alpha}{2}$, funkcja m osiąga wartość największą, mianowicie $m = R\,\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Gdy x rośnie dalej, $\sin(\alpha + 2x)$ stale maleje, a więc maleje i funkcja m, przechodząc znów przez te same wartości, co poprzednio, dopóty, dopóki nie stanie się $\sin(\alpha + 2x) = \sin \alpha$ czyli $\alpha + 2x = 180^0 - \alpha$, t. j. $x = 90^0 - \alpha$.

Przy $x = 90^0 - \alpha$ mamy znów $m = 2R \operatorname{tg} \alpha$.

Gdy x rośnie od $90^0 - \alpha$ do 90^0, $\sin(\alpha + 2x)$ przybiera wartości ujemne, co do wartości bezwzględnej coraz większe, zatem funkcja m stale maleje, przybierając jednak zawsze wartości dodatnie.

Wreszcie przy $x = 90^0$ zadanie traci sens.

Zbierając teraz wyniki naszego badania, powiemy, że m obierać można tylko w przedziale

$$0 < m \leqslant R\, \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Jeżeli $0 < m < 2R \operatorname{tg} \alpha$, wówczas zadaniu czyni zadość tylko jedna wartość kąta x, zawarta w przedziale $90^0 - \alpha < x < 90^0$,

jeżeli $\quad m = 2R \operatorname{tg} \alpha$, wówczas $x_1 = 0^0$, $x_2 = 90^0 - \alpha$;

jeżeli $2R \operatorname{tg} \alpha < m < R\, \dfrac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}$, wówczas zadaniu czynią zadość dwa kąty x_1 i x_2 takie, że

$$0^0 < x_1 < 45^0 - \frac{\alpha}{2}, \quad 45^0 - \frac{\alpha}{2} < x_2 < 90^0 - \alpha,$$

przyczem x_1 i x_2 związane są zależnością $x_1 + x_2 = 90^0 - \alpha$;

jeżeli $m = R\, \dfrac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}$, wówczas $x_1 = x_2 = 45^0 - \dfrac{\alpha}{2}$.

Ćwiczenia XXIII. 1. Dane jest koło o średnicy AB. Z punktu A wychodzi promień światła, który w C odbija się od okręgu, i w D przecina prostą AB. Należy:

1) wyrazić $OD = y$ jako funkcję kąta $\sphericalangle BAC = \alpha$ i zbadać tę funkcję a w szczególności ustalić, co dzieje się z y, gdy $\alpha \to 0^0$, lub gdy $\alpha \to 90^0$;

2) w otrzymanem równaniu położyć $\sin \alpha = x$, wykreślić odpowiednią krzywą i wskazać tę jej część, która odpowiada uczynionemu założeniu.

(*Egzamin ustny do szkoły wojskowej w Saint-Cyr*).

2. Na danem półkolu, którego średnica $AB = 2r$, obieramy ruchomy punkt M. Zbadać, w jaki sposób zmienia się suma odcinków $MB + MC$, gdzie MC jest prostopadłą do stycznej, poprowadzonej przez punkt A.

3. Przy tych samych warunkach, co w zadaniu poprzedniem, zbadać, jak zmienia sie suma $2MC + MB$. Wykreślić odpowiednią krzywą.

4. Dane jest półkole o średnicy AB i styczna, poprowadzona do niego przez punkt B. Przez A wykreślić sieczną, któraby przecięła półkole w C, styczną zaś w D tak, żeby było

$$2AC^2 + AD^2 = 4k^2,$$

gdzie k jest liczbą daną.

5 Rozwiązać trójkąt prostokątny, mając dany obwód jego $2p$ i wysokość h, poprowadzoną do przeciwprostokątnej.

6. Kulę daną o promieniu r przecinamy płaszczyzną i na przekroju jako na podstawie, budujemy stożek opisany na kuli.

Jaki powinien być kąt $2x$, pod którym ze środka kuli widać średnicę przekroju, jeżeli objętość stożka ma być m razy większa od objętości zawartego w nim odcinka kulistego?

7. Na przedłużeniu średnicy BC koła obieramy punkt S, kreślimy styczną SA i prowadzimy AP prostopadle do BC. Jak należy dobrać kąt środkowy $\sphericalangle AOS = x$, żeby przy obrocie figury dokoła OS powierzchnia boczna stożka, zakreślonego przez trójkąt SAP, miała się do powierzchni czaszy, zakreślonej przez łuk AC, jak $m : n$?

(*Egzamin ustny do szkoły wojskowej w Saint-Cyr*).

8. W kole o promieniu r dany jest punkt P, leżący na średnicy AB. Poprowadzić taką prostą PC, żeby przy obrocie figury dokoła AB obie części, na które zostało podzielone półkole ACB, zakreśliły bryły o równych objętościach. Odległość P od środka koła oznaczyć przez d.

9 Dane jest koło i w niem średnica AB oraz druga średnica CD, nachylona do pierwszej pod kątem α. Poprowadzić przez A cięciwę tak, by średnica CD podzieliła ją w stosunku $k : 1$.

10. W półkole o danym promieniu r wpisać trapez $ABCD$ tak, by dwa jego boki były prostopadłe do średnicy, trzeci bok CD widziany był ze środka koła pod kątem 60^0 i żeby pole jego równało się S. Zbadać rozwiązanie. Za niewiadomą obrać kąt $\sphericalangle COB = x$ i obliczyć ten kąt w przypadku, gdy S osiąga wartość największą.

(*Baccalauréat*).

11. Zbudować i rozwiązać trójkąt, mając dany kąt A, przeciwległy bok a oraz różnicę kwadratów dwóch drugich boków $= k^2$.

Zbadać rozwiązanie i zastosować do przypadku, gdy $a = 23{,}37$; $k^2 = 207{,}1$; $A = 81^0 47'$.

(*Egzamin dojrzałości w Dijon*).

12. Zbudować i rozwiązać trójkąt, mając dany bok a, przeciwległy kąt A i sumę kwadratów dwóch drugich boków $= k^2$.

(*Egzamin dojrzałości w Montpellier*).

13. Dany jest wielokąt foremny $A_1 A_2 A_3 \ldots A_n$ o boku $= a$. Obchodząc obwód wielokąta w jednym zwrocie, odkładamy na bokach jego odcinki $A_1 B_1 = A_2 B_2 = \ldots = A_n B_n = x$.

1) Dowieść, że wielokąt $B_1 B_2 B_3 \ldots B_n$ jest foremny.

2) Wyrazić jako funkcję wielkości danych tę wartość odcinka x, przy której otrzymany wielokąt ma pole S.

3) Przy jakiej wartości x pole to jest najmniejsze?

(*Egzamin dojrzałości w Dijon*).

14. Dane jest koło o promieniu r i w niem kąt środkowy $\sphericalangle AOB = \alpha$. Wpisać w koło trapez o danem polu S tak, żeby równoległe jego boki przechodziły przez A i B. Zbadać rozwiązanie i wykazać, że wśród trapezów, czyniących zadość tym warunkom, prostokąt ma największe pole.

(*Egzamin dojrzałości w Montpellier*).

15. Dane jest koło o środku O i promieniu r, w niem średnica stała, na średnicy punkt A, na jej przedłużeniu punkt B. Niech będzie $OA = a$, $OB = b$. Przez A prowadzimy cięciwę MN, która obraca się dokoła A. Zbadać, w jaki sposób zmienia się pole S trójkąta MNB.

(*Egzamin dojrzałości w gimnazjach włoskich*).

16. Dane jest koło $(O) r$ i kąt prosty $\sphericalangle MON$ oraz trzy liczby a, b, c. Znaleźć na okręgu (wewnątrz kąta $\sphericalangle MON$) taki punkt X, że jeśli poprowadzimy przez X styczną, przecinającą ramiona kąta w punktach P i Q, będziemy mieli

$$aX.P + bXQ = c.r.$$

Za niewiadomą obrać kąt $\sphericalangle XOP = \varphi$.

17. W trójkącie ABC, w którym $A = 90^0$, prowadzimy dwie środkowe BB', CC'. Wyrazić ich stosunek $y = \frac{BB'}{CC'}$ jako funkcję tangensa kąta B i wyznaczyć maximum i minimum tego stosunku przy zmianie kąta B.

18. Trójkąt ABC przeciąć prostą DE równoległą do BC tak, żeby pole trójkąta BDE równało się danej liczbie k^2. — Zbadać rozwiązanie.

19. Dane jest koło $(O) r$ i wewnątrz niego punkt P w odległości $OP = a$ od środka. Przez P prowadzimy dwie prostopadłe do siebie cięciwy AB i CD. Obierając jako niewiadomą kąt $\sphericalangle POA = x$, 1) obliczyć długości obu cięciw, 2) wyznaczyć x tak, żeby suma cięciw równała się $2m$. Zbadać rozwiązanie.

(*Egzamin dojrzałości w Lille*).

20. Dane jest koło $(O) r$, średnica $X'OX$ oraz dwa punkty okręgu A i A' symetryczne względem OX. W koło wpisujemy trapez równoramienny $AA'B'B$. Znaleźć w postaci logarytmicznej wzór na pole trapezu w zależności od r, α i φ, gdzie $\alpha = \sphericalangle AOX$, $\varphi = \sphericalangle BOA$, przyczem kąt α uważamy za stały, kąt φ za zmienny.

Jeżeli $\alpha = 45^0$, jak wielki musi być kąt φ, żeby pole trepezu było największe lub najmniejsze? Jaki jest w tych szczególnych przypadkach kształt trapezu?

(*Egzamin dojrzałości w Paryżu*).

[Wskazówka: przy badaniu największości i najmniejszości oznaczyć pole przez y, sin φ przez x i wykreślić odpowiednią krzywą, pamiętając o wskazówkach na str. 156. Można następnie sprawdzić wyniki badania, wykreślając tę samą funkcję, ale obierając jako zmienną niezależną kąt φ, nie zaś jego sinus].

21. W dany wycinek kołowy o kącie środkowym $= \alpha$ wpisano równoległobok, mający kąt spólny z wycinkiem i jeden wierzchołek na łuku

wycinka. Obliczyć pole równoległoboku, zbadać zmienność tego pola i znaleźć warunek, przy którym ono osiąga maximum.

22. Dane jest koło, promień OM i na nim odcinek $OA = a$. Znaleźć największy z kątów wpisanych, których ramiona przechodzą przez O i A.

23. Dany łuk AC koła podzielić na dwie części AB i BC tak, żeby: 1) suma cięciw $AB + BC$, 2) iloczyn tych cięciw $AB . BC$, 3) suma kwadratów cięciw były największe.

24. Rozważamy wszystkie trójkąty równoramienne, wpisane w dane koło. Który z nich ma: 1) największy obwód? 2) największe pole?

25. Na osi spółrzędnych OX znaleźć punkt, z którego pod największym kątem widać odcinek $KL = a$, leżący na osi OY, jeżeli $OK = b$.

26. Z punktu ruchomego M, leżącego na boku BC trójkąta ABC, poprowadzono MP i MQ prostopadle do boków b i c. Znaleźć najmniejszą wartość funkcji $MP^2 + MQ^2$.

27. W koło wpisujemy czworoboki o zmiennym kształcie i zmiennej wielkości, które jednak spełniają dwa warunki: przekątne każdego czworoboku są do siebie prostopadłe i odległość punktu ich przecięcia się od środka koła jest stała i równa się d. Który z tych czworoboków ma największe pole?

[W s k a z ó w k a: jako niewiadomą obrać kąt między przekątną i promieniem, poprowadzonym do punktu przecięcia się przekątnych].

28. D^wa^ koła są do siebie styczne w punkcie A. Przez A prowadzimy cięciwę AB w jednem kole i cięciwę AC w drugiem, przyczem kąt $\sphericalangle BAC = \alpha$ jest stały, same zaś cięciwy zmienne. Jak zmienia się pole trójkąta ABC i kiedy osiąga ono maximum?

29. Półkole o średnicy AB przecinamy ruchomą cięciwą CD, równoległą do AB. Oznaczając kąt $\sphericalangle COD$ przez 2α, wyrazić w zależności od niego stosunek objętości brył, zakreślonych przez obrót odcinka kołowego, opartego na cięciwie CD, i trójkąta CDO dokoła średnicy AC. W jaki sposób zmienia się ten stosunek, jeżeli zmieniamy kąt α? W szczególności, kiedy stosunek ten jest > 1, < 1, $= 1$?

30. Dany jest kwadrat $ABCD$. Znaleźć na boku CD i na jego przedłużeniu takie dwa punkty E, F, żeby odcinek EF widać było z wierzchołka A pod kątem 90^0, z wierzchołka zaś B pod kątem α. W jakich granicach zmieniać się może kąt α?

(Egzamin baccalauréat w Paryżu).

31. Na dwusiecznej kąta 2α obieramy punkt A w odległości m od wierzchołka kąta. Znaleźć na ramionach kąta takie dwa punkty B, B', żeby trójkąt BAB' był równoramienny i miał obwód, równający się danemu odcinkowi $2p$. Przedyskutować rozwiązanie.

32. Dany jest kąt dwuścienny i trzy punkty A, B, C na jego krawędzi, przyczem $AB = BC = 2r$. Przez A kreślimy na jednej ścianie prostą AD, nachyloną do krawędzi dwuścianu pod kątem α. Na drugiej ścianie kreślimy półkole, którego średnicą jest odcinek BC. Niech O będzie środkiem tego odcinka, M dowolnym punktem tego półokręgu, wreszcie

niech będzie $\sphericalangle COM = x$. Z punktu M prowadzimy odcinek MP, prostopadły do BC, oraz odcinek MQ prostopadły do AD.

1⁰. Obliczyć objętość czworościanu $AMPQ$ i zbadać, w jaki sposób zmienia się ona, gdy M przebiega półokrąg.

2⁰. Jakie są miejsca geometryczne środka kuli, opisanej na czworościanie, oraz środków boków trójkąta MPQ, gdy M przebiega półokrąg.

(*Egzamin baccalauréat w Bordeaux*).

33. Dane jest półkole o średnicy AB i w niem cięciwa ruchoma AK. Budujemy trójkąt foremny AKL Niech M będzie środkiem boku KL, MN zaś niech będzie odcinkiem prostopadłym do średnicy AB. Zbadać, w jaki sposób stosunek $\frac{MN}{AB}$ zmienia się w zależności od kąta $\sphericalangle KAB = x$.

34. Dana jest prosta m i punkt A, odległy od niej o d. Po prostej m przesuwa się odcinek BC o stałej długości a. Jak zmienia się kąt $\sphericalangle BAC = \alpha$; w szczególności, czy osiąga on maximum lub minimum?

35. Dane jest stałe koło $(O)r$ i stały punkt A w jego płaszczyźnie. Zbadać, jak zmienia się kąt, pod którym z A widzimy ruchomy promień koła.

36. Stosunek objętości stożka do objętości kuli wpisanej wyrazić w zależności od kąta 2α, pod którym tworząca stożka jest nachylona do podstawy. Zbadać otrzymaną funkcję.

37. W kole o promieniu r dana jest cięciwa $AB = a$. Na okręgu obieramy punkt X. Jak zmienia się suma $XA^2 + XB^2$ w zależności od zmian kąta $\sphericalangle BAX = \varphi$?

38. Dany jest kąt $\sphericalangle XOZ = \alpha$ oraz punkt A na jego ramieniu OX Pomiędzy punktami O i A porusza się po ramieniu kąta punkt M; niech MP będzie odcinkiem, prostopadłym do OZ. Zbadać przebieg zmienności funkcji
$$y = \sqrt{OM \cdot MA + 2\,MP^2}.$$
(*Egzamin do szkoły wojskowej w Saint-Cyr*).

39. W trójkącie prostokątnym ABC z wierzchołka C kąta prostego zatoczono koło promieniem r. Po okręgu porusza się punkt M. Wielkość $BM^2 - AM^2$ wyrazić jako funkcję kąta $\sphericalangle MCA$ i zbadać otrzymaną funkcję. (Zakładamy, że boki a, b trójkąta są stałe i dane).

(*Egzamin do belgijskiej szkoły artylerji i saperów w 1921 r.*).

40. W wycinek kołowy AOB, w którym $\sphericalangle AOB = 60^0$, wpisano prostokąt $DEFG$ w ten sposób, że wierzchołki D, E leżą na promieniu OA, wierzchołek F na łuku AB, wierzchołek G na promieniu OB. Przekątną m prostokąta przedstawić jako funkcję kąta $\sphericalangle FOA = x$ i zbadać, jak zmienia się przekątna, gdy zmieniamy kąt x.

(*Egzamin do szkoły techniczno wojskowej w Anglji*).

41. W kulę o promieniu R wpisano walec. Zbadać zmiany pola jego powierzchni całkowitej w zależności od kąta, pod którym ze środka kuli widać promień walca.

42. Mając dane równanie
$$(a + \lambda a') \cos x + (b + \lambda b') \sin x = c + \lambda c'$$
gdzie λ jest parametrem zmiennym, wykazać:

1) że istnieją wartości parametru λ, przy których równanie posiada rozwiązania;

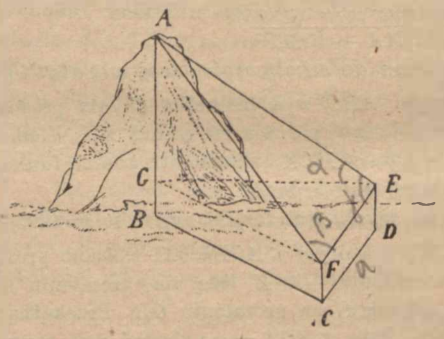
2) że jeśli $\sphericalangle XOM$, $\sphericalangle XOM'$ są dwoma rozwiązaniami, odpowiadającemi tej samej wartości λ i jeżeli $OM = OM'$, to prosta MM' przechodzi przez stały punkt, gdy parametr λ zmienia się.

ROZDZIAŁ VI.

Przykłady zastosowań funkcyj trygonometrycznych do geometrji praktycznej.

§ **73** W poprzednich rozdziałach rozwiązywaliśmy niejednokrotnie zadania z geometrji praktycznej (miernictwa), które polegały przeważnie na obliczaniu wysokości rozmaitych przedmiotów lub ich odległości. Nie możemy tu podawać opisu przyrządów mierniczych i metod mierzenia, gdyż żaden opis nie zastąpi praktycznego zapoznania się z przyrządem. Poprzestaniemy więc na zaznaczeniu, że dokładne pomiary długości są bardzo mozolne, natomiast pomiary kątów są względnie łatwe, wobec czego w praktyce staramy się mierzyć jak najwięcej kątów i poprzestajemy zwykle na mierzeniu długości jednego tylko lub dwóch odcinków.

Zadanie I. *Znaleźć wysokość góry, wznoszącej się na płaszczyźnie poziomej.*



Rys. 101.

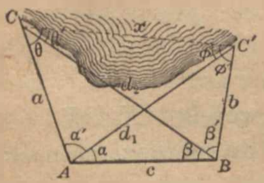
Obieramy na płaszczyźnie punkty C i D tak, żeby można było zmierzyć odległość między niemi $= a$ i żeby z tych punktów widać było górę. Mierzymy kąty $\sphericalangle AEG = \alpha$, $\sphericalangle AFE = \beta$, $\sphericalangle AEF = \gamma$. (Odcinki CF, ED wyobrażają na rys. 101 wysokość przyrządu mierniczego. Wysokość ta jest, oczywiście, na rysunku przesadnie wielka).

Ponieważ $EF = CD = a$, zatem w trójkącie AEF znamy dwa kąty i bok, możemy go więc rozwiązać, a znalazłszy bok AE i znając kąt $\sphericalangle AEG = \alpha$, obliczymy odcinek AG, poczem pozostanie już tylko jedno działanie: dodanie wysokości BG przyrządu mierniczego do znalezionego odcinka AG.

Znajdujemy, że

$$AG = \frac{a \, . \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\beta + \gamma)}.$$

Zadanie II. *Obliczyć odległość między dwoma niedostępnemi punktami.*



Rys. 102.

Jeżeli C i C' są dwoma punktami tak położonemi, że odcinka CC' bezpośrednio zmierzyć nie możemy, wówczas obieramy punkty A, B tak, żeby można było z nich widzieć punkty C i C' i żeby można było zmierzyć odcinek $AB = c$. W celu uproszczenia zadania przypuśćmy, że punkty A, B, C, C' leżą w jednej płaszczyźnie.

Zagadnienie rozwiążemy, o ile zmierzymy kąty

$$\sphericalangle C'AB = \alpha, \quad \sphericalangle C'AC = \alpha', \quad \sphericalangle CBA = \beta, \quad \sphericalangle CBC' = \beta'.$$

Jakoż trójkąt $AC'B$ możemy rozwiązać (dlaczego?) i obliczyć bok $AC' = d_1$. Tak samo z trójkąta ACB możemy obliczyć bok $AC = a$, wobec czego z trójkąta CAC' znajdziemy $CC' = x$.

W celu sprawdzenia rachunku obliczamy również

$$BC' = b \quad \text{i} \quad CB = d_2,$$

poczem raz jeszcze znajdujemy x, ale z trójkąta CBC'.

Zadanie III. *Znając położenie wzajemne trzech punktów A, B, C wyznaczyć położenie czwartego punktu X, leżącego w tej samej płaszczyźnie* (T. zw. zagadnienie Pothenota)[1]).

Rzecz prosta, że położenie punktu X powinniśmy wyznaczyć wyłącznie przez zmierzenie pewnych kątów. W tym celu wystarczy zmierzyć dwa kąty:

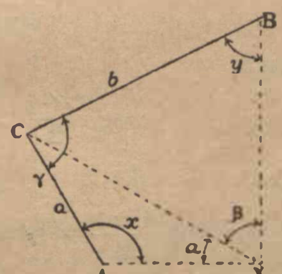
$$\sphericalangle AXC = \alpha \quad \text{i} \quad \sphericalangle BXC = \beta$$

(rys. 103). Istotnie, z warunków zadania wynika, że znamy

$$AC = a, \quad CB = b, \quad \sphericalangle BCA = \gamma.$$

Jeżeli położymy

$$\sphericalangle XAC = x, \quad \sphericalangle XBC = y,$$



Rys 103.

---

[1]) Właściwie zagadnienie to powinno nazywać się zagadnieniem *Snelliusa* (XVII w.), który postawił je i rozwiązał o kilka lat wcześniej, niż Pothenot.

wówczas będziemy mieli

$$AX = \frac{a \cdot \sin(\alpha + x)}{\sin \alpha},$$

$$BX = \frac{b \cdot \sin(\beta + y)}{\sin \beta}$$

$$CX = \frac{a \sin x}{\sin \alpha} = \frac{b \sin y}{\sin \beta}.$$

Znając kąty x i y, obliczylibyśmy z łatwością AX, BX i CX. Widzimy tedy, że zadanie sprowadziliśmy do rozwiązania następującego

Zadania pomocniczego. *Rozwiązać układ równań*

$$x + y = 360^0 - (\alpha + \beta + \gamma) \qquad (1)$$

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}. \qquad (2)$$

Ten typ układu równań trygonometrycznych jest nam znany: na str. 142 natrafiliśmy na podobny układ, tam jednak chodziło o konstrukcję geometryczną, tu zaś pokażemy, w jaki sposób zastosować można rachunek logarytmiczny do jego rozwiązania.

Kładąc
$$\frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta} = \operatorname{tg} \varphi,$$

otrzymamy z równania (2)

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{\operatorname{tg} \varphi + 1}{\operatorname{tg} \varphi - 1}$$

czyli

$$\operatorname{tg} \frac{x+y}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{x-y}{2} = \operatorname{ctg}(\varphi - 45^0),$$

skąd

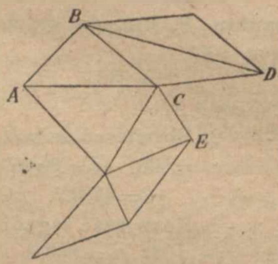
$$\operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = \operatorname{tg}\left(180^0 - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}\right) \operatorname{tg}(\varphi - 45^0).$$

Z równania tego znajdujemy kąt $\frac{x-y}{2}$, a znając $\frac{x+y}{2}$, obliczamy kąty x i y.

Uwaga. Rozwiązanie powyższe przypuszcza, że $\sin x \neq \sin y$ czyli $\operatorname{tg} \varphi \neq 1$.

Pojęcie o zagadnieniu triangulacji.

§ **74**. Zapomnijmy na chwilę, że powierzchnia ziemi nie jest płaszczyzną, i wyobraźmy sobie, że kraj jakiś pokryliśmy siecią trójkątów (rys. 104).

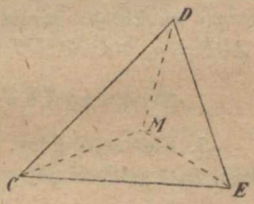


Rys. 104.

Jest rzeczą zrozumiałą, że jeśli zmierzymy bok jednego z trójkątów sieci, np. bok AB, wówczas boki wszystkich pozostałych trójkątów potrafimy obliczyć kolejno, o ile zmierzymy kąty tych trójkątów. Np. zmierzywszy $\sphericalangle CAB$ i $\sphericalangle ABC$, obliczymy bok BC; zmierzywszy kąty $\sphericalangle DBC$ i $\sphericalangle BCD$, obliczymy boki BD CD, i t. d. Ten sposób postępowania przypuszcza, że, stojąc w wierzchołku jakiegoś trójkąta, widzimy wyraźnie wierzchołki trójkątów sąsiednich, tak, iż możemy celować do tych wierzchołków z naszego przyrządu mierniczego.

Widzimy tedy, że do wyznaczenia położenia wszystkich wierzchołków sieci triangulacyjnej wystarczy zmierzenie jednego odcinka (zwanego *bazą* albo *podstawą* sieci), wszystkie zaś dalsze pomiary polegają na mierzeniu kątów.

Przypuśćmy teraz, że po obliczeniu sieci triangulacyjnej chcemy wyznaczyć położenie punktu M, leżącego wewnątrz jednego z trójkątów sieci, np. trójkąta CDE (rys. 105). Mamy w takim razie do czynienia z zagadnieniem Pothenota, o którem przed chwilą była mowa. Widzieliśmy, że do jego rozwiązania wystarcza pomiar dwóch kątów, np. $\sphericalangle CMD$ i $\sphericalangle CME$.



Rys. 105.

W rzeczywistości sprawa pomiaru kraju, a więc sprawa sporządzenia jego mapy nie przedstawia się tak prosto. Pomijając już nierówności gruntu i potrzebę uwzględnienia ich na mapie, nie możemy zapominać o tem, że ziemia ma kształt bryły, zbliżonej nieco do elipsojdy obrotowej [1]), że zatem boki trójkątów sieci są łukami pewnych krzywych, zakreślonych na powierzchni ziemi, wobec czego do rozwią-

---

[1]) Elipsojdą obrotową nazywamy bryłę, utworzoną przez obrót elipsy dokoła jednej lub drugiej osi.

zywania tych trójkątów nie możemy stosować wzorów trygonometrji płaskiej. Natomiast wzory te stosować można do pomiarów, dokonywanych na małych przestrzeniach, gdyż popełnione przy tem błędy będą, praktycznie rzecz biorąc, nieznaczne.

Ćwiczenia XXIV. 1. Chcąc znaleźć odległość od A do niedostępnego punktu B, którego przytem z A dojrzeć nie można, zmierzono odcinki (rys. 106)

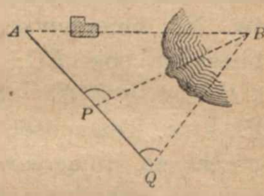
$$AP = 236{,}7,\quad PQ = 215{,}9,\quad \sphericalangle APB = 142^\circ 37',\quad \sphericalangle AQB = 76^\circ 14'.$$

Obliczyć AB.

2. Rozwiązać zadanie II (str. 177), kładąc $c = 500$, $\alpha = 35^\circ 17'$, $\alpha' = 70^\circ 13'$, $\beta = 47^\circ 32'$, $\beta' = 48^\circ 18'$.

3. Rozwiązać zagadnienie Pethenota, kładąc (rys. 103) $a = 238{,}2$, $b = 453{,}6$, $\alpha = 32^\circ 13'$, $\beta = 48^\circ 12'$, $\gamma = 177^\circ 25'$.

4. Na przeciwległych brzegach rzeki zmierzono dwa równe i równoległe odcinki $AB = CD = a$. Obliczyć szerokość rzeki, jeżeli odcinek AB widzimy z punktów C i D pod kątami α i β.



Rys. 106.

5. Na płaszczyźnie poziomej wznosi się wieża okrągła. Chcąc obliczyć jej średnicę, zmierzono na tejże płaszczyźnie odcinek $AB = a$ oraz kąty $\sphericalangle BAM = \alpha$, $\sphericalangle BAM' = \alpha'$, $\sphericalangle ABN = \beta$, $\sphericalangle ABN' = \beta'$ zawarte między AB i stycznemi do wieży, poprowadzonemi z punktów A i B. Obliczyć średnicę wieży i wykazać, że

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta'}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha'}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}.$$

6. Chcąc obliczyć odległość między dwoma niedostępnemi punktami P, Q, wytknięto prostą $APQB$ i zmierzono odcinki $AP = a$, $BQ = b$, $\sphericalangle AOP = \alpha$, $\sphericalangle POQ = \beta$, $\sphericalangle QOB = \gamma$. Obliczyć $PQ = x$.

[W s k a z ó w k a: w dwojaki sposób obliczyć stosunek $\frac{OP}{OQ}$].

7. Elewacja góry, widzianej z punktów A, B, C, równa się α. Dowieść, że wysokość jej równa się

$$\frac{a}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin A},$$

jeżeli punkty A, B, C tworzą trójkąt.

8. Z trzech punktów A, B, C, leżących w tej samej płaszczyźnie poziomej, obserwujemy kąt wzniesienia szczytu górskiego i znajdujemy, że w pierwszych dwóch punktach kąt ten równa się α, w punkcie zaś C kąt ten równa się β. Dowieść, że wysokość h góry wyraża się wzorem

$$[h^2(\operatorname{ctg}^2\beta - \operatorname{ctg}^2\alpha) - ab\cos C^2] = b^2 \sin^2 A\,(4h^2 \operatorname{ctg}^2\alpha - c^2).$$

ROZDZIAŁ VII.

Miara teoretyczna kątów.

Radjan.

§ **75**. We wszystkich zagadnieniach, z któremi mieliśmy dotąd do czynienia, za jednostkę miary kątów uważaliśmy kąt prosty. Kąt ten dzieliliśmy na 90 równych części, zwanych stopniami; stopnie dzieliliśmy na minuty, te zaś na sekundy. Obok takiego podziału kąta prostego używają we Francji podziału innego: dzielą mianowicie kąt prosty na 100 części równych, zwanych po francusku „grades“, te zaś na części dziesiąte i setne. Niektórzy znów uczeni posługują się systemem mieszanym: kąt prosty dzielą na 90 stopni, lecz zamiast minut i sekund wprowadzają setne części stopnia.

Wszystkiemi trzema układami posługują się badacze przy pomiarach — są to układy t. zw. *praktyczne*, natomiast w zagadnieniach teoretycznych używamy innej jednostki miary, zwanej *jednostką teoretyczną* albo *radjanem*.

Określenie. *Radjanem nazywamy kąt środkowy, który wspiera się na łuku, równającym się promieniowi koła.*

Jednostka miary powinna być wielkością stałą, jeżeli ma mieć wartość praktyczną. Musimy tedy zbadać, czy radjan czyni zadość temu warunkowi. W tym celu oprzemy się na dwóch twierdzeniach geometrycznych:

(I) długość okręgu koła wyraża się wzorem

$$C = 2\pi r,$$

gdzie π jest liczbą stałą;

(II) łuki tego samego koła są proporcjonalne do kątów środkowych, które się na nich wspierają.

Przypuśćmy, że $\sphericalangle AOB$ na rys. 107 jest radjanem, czyli że długość łuku AB równa się długości promienia $OA = r$. Na mocy twierdzenia (II) mamy proporcję:

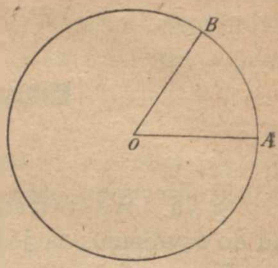
$$\frac{\sphericalangle AOB}{\text{cztery kąty proste}} = \frac{\text{długość łuku } AB}{\text{długość okręgu}}$$

czyli

$$\frac{\text{radjan}}{360^0} = \frac{r}{2\pi r}$$

$$= \frac{1}{2\pi}.$$

Z równania tego wynika, że radjan jest istotnie wielkością stałą i że równa się on $\left(\frac{180}{\pi}\right)$ stopniom. Ponieważ π jest liczbą niewymierną, zatem ilość jednostek praktycznych (stopni lub gradów), zawartych w radjanie, musi wyrażać się liczbą niewymierną. Biorąc na π odpowiednią wartość przybliżoną, łatwo jest obliczyć, że w przybliżeniu



Rys. 107.

$$1 \text{ radjan} = 57^\circ 17' 45'' \text{ (z nadmiarem)}$$

Zapomocą równości

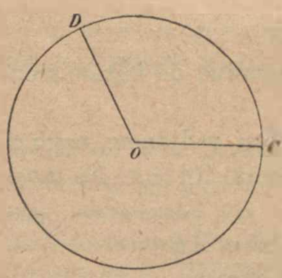
$$\textbf{1 radjan} = \frac{180^\circ}{\pi} \tag{1}$$

możemy z łatwością przechodzić od jednostki praktycznej do teoretycznej lub odwrotnie. W szczególności z równości (1) widać odrazu, że

kąt pełny ma 2π radjanów,
„ półpełny „ π „
„ prosty „ $\frac{\pi}{2}$ „

§ **76.** Zauważmy odrazu, że zarówno pole wycinka kołowego, jak długość jego łuku wyrażają się bardzo prostemi wzorami, jeżeli kąt wycinka dany jest w radjanach.

Niech będzie dany jakikolwiek wycinek kołowy *COD*, którego kąt $\sphericalangle COD$ ma φ radjanów. Opierając się na znanych twierdzeniach geometrycznych, mamy dwie proporcje



Rys. 108.

$$\frac{\text{pole wycinka } COD}{\text{pole koła}} = \frac{\text{kąt} \sphericalangle COD}{\text{kąt pełny}},$$

$$\frac{\text{długość łuku } CD}{\text{długość okręgu}} = \frac{\text{kąt} \sphericalangle COD}{\text{kąt pełny}}.$$

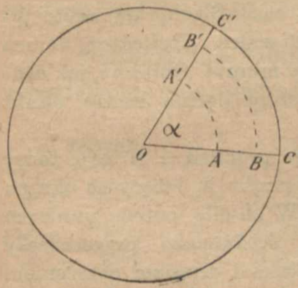
Jeżeli przez S i $Ł$ oznaczymy odpowiednio pole wycinka i długość jego łuku, wówczas z powyższych proporcyj wyniknie, że

$$S = \frac{\varphi r^2}{2},$$

$$Ł = \varphi r$$

Wobec prostoty tych wzorów posługiwanie się miarą teoretyczną kąta jest wskazane w zagadnieniach, w których mamy cią-

gle do czynienia bądź z długością łuków, bądź z polami wycinków kołowych. Tak postępuje np. fizyk, gdy bada ruch obrotowy. Jeżeli krążek jakiś obraca się dokoła osi, prostopadłej do jego płaszczyzny i przechodzącej przez środek O (rys. 109), to punkty A, B, C,... leżące na jednym promieniu, mają różne prędkości linjowe (w ciągu tego samego czasu kreślą drogi różnej długości), lecz wszystkie mają tę samą prędkość kątową: jeśli punkt A zakreślił łuk koła, odpowiadający kątowi środkowemu α, to wszystkie punkty promienia OA zakreśliły łuki, odpowiadające temu samemu kątowi środkowemu. Jeżeli obrót ciała jest jednostajny, wówczas prędkość kątowa jest stała i możemy ją mierzyć liczbą radjanów, zakreślonych w ciągu sekundy przez jakikolwiek punkt ciała.



Rys. 109.

Ćwiczenia XXV. 1. Obliczyć miarę teoretyczną następujących kątów: 45^0, 30^0, 60^0, 75^0, 10^0, 1^0, $1'$, $1''$, $6^0 12'$.

2. Ile stopni, minut i sekund mają kąty, zawierające $\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{12}$, $\frac{\pi}{20}$. $\frac{\pi}{100}$ radjanów?

3. Ile radjanów ma kąt środkowy, którego łuk = 25 cm., jeżeli promień koła = 36 cm.

4. Pole odcinka kołowego równa się $\frac{r^2}{2}(\varphi - \sin\varphi)$, gdzie φ oznacza miarę teoretyczną kąta środkowego, wspartego na łuku odcinka.

5. Koło obraca się dokoła osi z prędkością kątową $\omega = 3 \frac{\text{rad.}}{\text{sek.}}$ Ile obrotów wykona koło w ciągu minuty?

6. Mechanicy mierzą często prędkość kół w maszynie liczbą obrotów na sekundę. Ilu jednostkom prędkości kątowej (ilu radjanom na sekundę) odpowiada prędkość n obrotów na sekundę?

7. Cyklista jedzie z prędkością $12 \frac{\text{klm.}}{\text{g.}}$. Jaka jest prędkość kątowa koła roweru, jeżeli średnica koła równa się 1 m?

8. Jak wielka musiałaby być średnica koła roweru, żeby liczba obrotów, wykonanych przez koło w ciągu 10 sekund, równała się liczbie kilometrów, które cyklista robi na godzinę, w założeniu, że ruch cyklisty jest jednostajny?

9. Droga przebiega między punktami A i B po łuku koła. Idąc tą drogą i obserwując kompas, spostrzegliśmy, że w A igiełka wskazywała

kierunek drogi jako N, w B zaś jako NE. Jak wielki jest promień koła, jeżeli długość drogi od A do B wynosi 150 m.?

10. Na koło o promieniu 15 cm nawinięto nitkę długości 10 cm. Jak wielka jest (z dokł. do 0,01), odległość między końcami nitki?

11. Kawał prostokątny blachy długości 72 cm. zgięto w kształt części powierzchni walca kołowego o promieniu 12 cm. Blachy tej użyto jako reflektora, umieszczając źródło światła na osi walca Reflektor obraca się dokoła osi walca z prędkością 10 obrotów na minutę. Obliczyć, jak długo w ciągu jednego obrotu reflektora oświetlony będzie każdy punkt w polu działania przyrządu.

12. Po okręgu nieruchomego koła, którego promień = 90 cm., toczy się drugie koło o promieniu 30 cm. Początkowo punkt A, leżący na okręgu mniejszego koła, był punktem styczności kół. W chwilę potem punktem styczności stał się punkt B mniejszego koła, średnicowo przeciwległy punktowi A. Jaka jest odległość między pierwszem i drugiem położeniem punktu A?

13. Na sznurze długości 50 cm. wisi ciężarek. Sznurek wprawiono w ruch w taki sposób, że ciężarek zakreśla koło, sznurek zaś kreśli powierzchnię stożkową. Sznurek wykonywa dokoła osi stożka $2^1/_2$ obroty na sekundę, ciężarek zaś przebiega 4 metry na sekundę. Obliczyć kąt rozwarcia stożka.

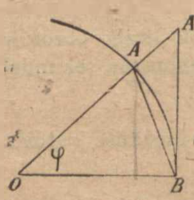
14. Walec o średnicy 15 cali pływa po wodzie tak, że oś walca jest pozioma, a najwyższe punkty jego powierzchni znajdują się o 4 cale nad powierzchnią wody. Obliczyć ciężar właściwy walca.

15. W danem kole poprowadzić cięciwę tak, by pole jego zostało podzielone w stosunku 1 : 2.

16. Ułożyć równanie, wyrażające następujący związek: w kole o średnicy 12 cm. kąt środkowy $\sphericalangle AOB$ jest tak wielki, że suma łuku AB i cięciwy AB równa się 16 cm. Rozwiązać to równanie graficznie.

Związki między miarą teoretyczną kąta ostrego a jego funkcjami trygonometrycznemi.

§ 77. Niech będzie dane koło oraz kąt ostry środkowy $\sphericalangle AOB$, którego miarą teoretyczną niech będzie liczba φ.



Rys 110.

Przez punkt B prowadzimy styczną do koła, która w punkcie A' przecina przedłużenie promienia OA. Pole wycinka kołowego AOB jest większe od pola trójkąta AOB, lecz mniejsze od pola trójkąta $A'OB$. Wyrażając te trzy pola w zależności od promienia r i od kąta φ, mamy nierówności

$$\frac{r^2}{2}\sin\varphi < \frac{r^2}{2}\varphi < \frac{r^2}{2}\operatorname{tg}\varphi,$$

skąd wynika, że

$$\sin\varphi < \varphi < \operatorname{tg}\varphi. \qquad (II)$$

Uczeń powinien pamiętać, że tę ważną nierówność otrzymaliśmy zakładając, że φ jest miarą **teoretyczną** kąta i że $\varphi < \frac{\pi}{2}$. Orzeka więc ona, że *sinus kąta ostrego jest mniejszy od liczby radjanów tego kąta, ta zaś jest mniejsza od tangensa kąta.*

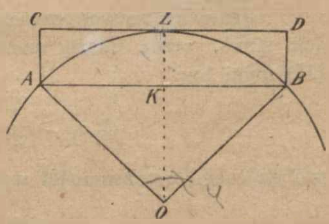
Następująca tabliczka może dać niejakie pojęcie o tem, jak przedstawia się nierówność (II) dla różnych kątów.

stopnie	sinus	miara teoretyczna	tangens
0^0	0	0	0
1^0	0,0174524	0,0174533	0,017455
2^0	0,034900	0,034907	0,03492
3^0	0,05234	0,05236	0,52408
4^0	0,06976	0,06981	0,06993
5^0	0,08716	0,08727	0,08749
10^0	0,17365	0,17453	0,17633
20^0	0,34202	0,34907	0,36397
30^0	0,50000	0,52360	0,57735

Uczeń zilustruje te związki graficznie, budując na jednym rysunku wykresy trzech funkcyj $y = \operatorname{tg} \vartheta$, $y = \vartheta$, $y = \sin \vartheta$.

§ **78**. Chcąc zrobić użytek praktyczny ze znalezionej nierówności, musimy zastanowić się nad pytaniem: **jak wielki błąd popełnimy, zastępując sinus jakiegoś kąta ostrego przez jego miarę teoretyczną?**

Odpowiedź na to pytanie może nam dać figura 111. Różnica między polem wycinka kołowego AOB a polem trójkąta AOB jest niewątpliwie mniejsza od pola prostokąta $ACDB$, którego jeden bok równa się cięciwie AB, drugi zaś równa się strzałce KL. Otóż, oznaczając przez φ miarę teoretyczną kąta $\sphericalangle AOB$, mamy



Rys. 111.

$$AB = 2r \sin \frac{\varphi}{2}, \qquad KL = r\left(1 - \cos \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$= 2r \sin^2 \frac{\varphi}{4}$$

$$\text{pole } \triangle AOB = \frac{r^2}{2}\sin\varphi, \quad \text{pole wycinka } AOB = \frac{r^2}{2}\varphi$$

$$\text{pole prostokąta } ACDB = 4r^2 \sin\frac{\varphi}{2}\sin^2\frac{\varphi}{4},$$

zatem

$$\frac{r^2}{2}(\varphi - \sin\varphi) < 4r^2\sin\frac{\varphi}{2}\sin^2\frac{\varphi}{4},$$

skąd wynika, że

$$\varphi - \sin\varphi < 8\sin\frac{\varphi}{2}\sin^2\frac{\varphi}{4}.$$

Jeżeli w prawej części tej nierówności zastąpimy sinusy przez miary teoretyczne odpowiednich kątów, zwiększymy przez to część prawą nierówności, wobec czego nierówność pozostanie prawdziwa. Mamy więc prawo twierdzić, że

$$\varphi - \sin\varphi < 8\,\frac{\varphi}{2}\cdot\left(\frac{\varphi}{4}\right)^2$$

czyli, że

$$\varphi - \sin\varphi < \frac{\varphi^3}{4}. \qquad \text{(III)}$$

Do tego samego wyniku moglibyśmy dojść na drodze czysto analitycznej, wychodząc np. z tożsamości

$$\sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$$

$$= 2\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

$$= 2\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\left(1 - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right).$$

Jeżeli w prawej części tej tożsamości zastąpimy zarówno tangens, jak sinus, przez miarę teoretyczną kąta, wówczas na mocy nierówności (II) musi być

$$\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} > \frac{\varphi}{2}, \qquad 1 - \sin^2\frac{\varphi}{2} > 1 - \frac{\varphi^2}{4},$$

wobec czego z tożsamości wyniknie nierówność

$$\sin\varphi > 2\,\frac{\varphi}{2}\left(1 - \frac{\varphi^2}{4}\right),$$

skąd

$$\varphi - \sin\varphi < \frac{\varphi^3}{4}.$$

§ **79.** Ponieważ

$$\cos\varphi = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

zatem

$$\cos\varphi > 1 - 2\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2$$

czyli

$$\cos\varphi > 1 - \frac{\varphi^2}{2}. \qquad \text{(IV)}$$

Dowód tej nierówności oparliśmy na tem, że $\sin\varphi < \varphi$, zatem nierówność (IV) została dowiedziona przy tych samych założeniach, co poprzednia (mianowicie, że φ jest miarą teoretyczną kąta i że $\varphi < \frac{\pi}{2}$).

§ **80.** Z nierówności (III) i (IV) wynika najpierw, że im mniejszy jest kąt ostry, tem sinus jego mniej różni się od miary teoretycznej, a kosinus od jedności.

Ponieważ

$$1^0 = \frac{\pi}{180} \text{ radjanów, zatem}$$

$$1^0 = 0{,}017453\ldots \text{ radjanów}$$

$$3^0 = 0{,}052359\ldots \text{ radjanów.}$$

Jeśli więc na $\sin 3^0$ weźmiemy wartość 0,052359..., popełnimy błąd mniejszy od $\frac{1}{4}(0{,}052359\ldots)^3$. Łatwo jest obliczyć, że błąd ten jest mniejszy od 0,00004. Jeżeli zamiast $\sin 1^0$, weźmiemy 0,017453..., popełnimy błąd mniejszy od 0,000002. Jeżeli $\sin 1'$ zastąpimy liczbą radjanów, błąd wystąpi dopiero w dwunastym znaku dziesiętnym.

Tak samo, jeżeli $\cos 2^0 30'$ zastąpimy przez 1, popełnimy błąd mniejszy od $\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2} . 0{,}017453\ldots\right)^2$ czyli mniejszy od $\frac{1}{10^3}$.

Równie łatwo jest dowieść, że $\cos\varphi - \left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) > \frac{\varphi^4}{16}$.

Istotnie

$$\sin\frac{\varphi}{2} > \frac{\varphi}{2} - \frac{\varphi^3}{32},$$

zetem

$$\sin^2\frac{\varphi}{2} > \frac{\varphi^2}{4} - \frac{\varphi^4}{32} + \left(\frac{\varphi^3}{32}\right)^2,$$

a więc tembardziej musi być

$$\sin^2\frac{\varphi}{2} > \frac{\varphi^2}{2} - \frac{\varphi^4}{32} \qquad (1)$$

Jeżeli w tożsamości

$$\cos\varphi = 1 - \sin^2\frac{\varphi}{2}$$

zastąpimy $\sin^2 \frac{\varphi}{2}$ przez $\frac{\varphi^2}{4} - \frac{\varphi^4}{32}$,

otrzymamy żądaną nierówność w postaci

$$\cos \varphi < 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{16} \qquad (2)$$

§ 81. Opierając się na rozważaniach poprzedniego paragrafu, można obliczyć sin 1′ z jedenastoma dokładnemi znakami dziesiątnemi i cos 1′ z piętnastoma dokładnemi znakami. Otrzymamy mianowicie

$$\sin 1' = 0{,}00029088820$$
$$\cos 1' = 0{,}999999957692025.$$

Stosując wzory na $\sin(\alpha + \beta)$ i $\cos(\alpha + \beta)$, można obliczyć kolejno sin 2′, cos 2′, sin 3′, cos 3′, i t. d. i ułożyć w ten sposób tablicę sinusów i kosinusów.

Rachunki możemy ujednostajnić i uprościć, jeżeli w tożsamościach

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

położymy

$$\alpha = m\varphi, \quad \beta = \varphi.$$

Otrzymamy wzory

$$\sin(m + 1)\varphi = 2 \cos \varphi \sin m\varphi - \sin(m - 1)\varphi$$
$$\cos(m + 1)\varphi = 2 \cos \varphi \cos m\varphi - \cos(m - 1)\varphi.$$

Zapomocą tych wzorów Jerzy Joachim (zwany Retius) obliczył w XVI w. tablicę, zawierającą wartości funkcyj trygonometrycznych w odstępach 10″.

Analiza wyższa daje nam dziś bez porównania prostsze sposoby obliczania wartości funkcyj trygonometrycznych, przytem niezależnie od tego, czy znamy wartości funkcyj kątów mniejszych.

§ 82. Nierówność (IV), której możemy nadać postać

$$1 - \cos \varphi < \frac{\varphi^2}{2},$$

powiada nam, że gdy kąt φ maleje nieograniczenie, $\cos \varphi$ przybiera wartości dowolnie blizkie do 1.

Istotnie, niech będzie dana jakkolwiek mała liczba dodatnia ε. Jeżeli chcemy, by $\cos \varphi$ różnił się od 1 mniej, niż o ε, wystarcza tak dobrać kąt φ, żeby było

$$\frac{\varphi^2}{2} = \varepsilon$$

czyli

$$\varphi = \pm \sqrt{2\varepsilon}.$$

Np. gdyby $\cos \varphi$ miał różnić się od 1 mniej, niż o $\frac{1}{20000}$, wówczas wystarczyłoby obrać na φ wartość

$$\varphi = 0{,}01.$$

Łatwo jest obliczyć, że kąt, mający za miarę teoretyczną 0,01 ma $0^0\,34'\,23''$ (z dokładnością do $1''$).

Rzecz jasna, że jeśli dla jakiejś liczby dodatniej φ_1 zachodzi nierówność

$$\frac{\varphi_1^2}{2} < \varepsilon,$$

to dla każdej liczby φ_2, spełniającej warunek

$$|\varphi_2| < \varphi_1,$$

musi tembardziej zachodzić nierówność

$$\frac{\varphi_2^2}{2} < \varepsilon.$$

Dowodzi to, że jeśli udało się nam znaleźć kąt φ, spełniający nierówność

$$1 - \cos\varphi < \varepsilon,$$

wówczas nierówność ta pozostanie prawdziwa, jeżeli zamiast kąta φ weźmiemy jakikolwiek kąt, którego wartość bezwzględna jest mniejsza od wartości bezwzględnej kąta φ.

Możemy tedy twierdzić, że

$$\cos\varphi \to 1, \quad \text{gdy} \quad \varphi \to 0.$$

Innemi słowami: *gdy kąt φ dąży do zera czy to przez wartości dodatnie czy przez ujemne, funkcja* $\cos\varphi$ *dąży do granicy* 1.

Istotnie, dowiedliśmy, że spełnione są wszystkie warunki istnienia granicy, a mianowicie:

1) istnieje stała liczba 1;

2) funkcja kosinus zbliża się do tej stałej liczby w taki sposób, że jakkolwiek małą zadanoby nam liczbę dodatnią φ, potrafimy znaleźć taką wartość φ_1 kąta φ, która spełnia nierówność

$$1 - \cos\varphi < \varepsilon;$$

3) jeżeli zmniejszać będziemy wartość bezwzględną kąta t. j. na φ obierać będziemy wartości $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \ldots$ mniejsze od φ_1, różnica między $\cos\varphi$ a 1 pozostanie zawsze mniejsza od ε.

§ **83**. W poprzednim paragrafie podaliśmy tylko dowód analityczny faktu, który ustaliliśmy poprzednio na drodze geometrycznej (§ 30, str. 64). Teraz poznamy nową własność funkcji sinus.

Z nierówności

$$\varphi - \sin\varphi < \frac{\varphi^3}{4}$$

wynika, że

$$1-\frac{\sin\varphi}{\varphi}<\frac{\varphi^2}{4},$$

przyczem

$$0<\varphi<\frac{\pi}{2}.$$

Powiadam, że jeśli $\varphi\longrightarrow 0$, to $\frac{\sin\varphi}{\varphi}\longrightarrow 1$.

Jakoż

1) jakkolwiek mała byłaby liczba dodatnia ε, możemy znaleźć taki kąt dodatni φ, że

$$1-\frac{\sin\varphi}{\varphi}<\varepsilon,$$

ponieważ w tym celu wystarczy obrać φ tak, żeby było

$$\frac{\varphi^2}{4}=\varepsilon,$$

czyli

$$\varphi=2\sqrt{\varepsilon}.$$

2) Jeżeli znaleźliśmy taki kąt φ', że

$$1-\frac{\sin\varphi'}{\varphi'}<\varepsilon,$$

to każdy kąt dodatni $\varphi''<\varphi'$ musi czynić zadość tej nierówności, gdyż

$$\left(\frac{\varphi''}{2}\right)^2<\left(\frac{\varphi'}{2}\right)^2.$$

§ **84**. Nierówności

$$\sin\varphi<\varphi<\operatorname{tg}\varphi$$

dowiedliśmy dla $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$. Wobec tego wszystkie wyrazy tej nierówności są liczbami dodatniemi. Jeżeli podzielimy nierówności przez $\operatorname{tg}\varphi$, otrzymamy

$$\cos\varphi<\frac{\varphi}{\operatorname{tg}\varphi}<1.$$

Dowiedliśmy poprzednio, że różnica między 1 i $\cos\varphi$ może być uczyniona mniejszą od jakiejkolwiek z góry zadanej liczby dodatniej ε. Ponieważ liczba $\frac{\varphi}{\operatorname{tg}\varphi}$ zawiera się zawsze między $\cos\varphi$ i 1, zatem jeżeli dobierzemy kąt φ tak, by było

$$1-\cos\varphi<\varepsilon,$$

to tembardziej musi być

$$1-\frac{\varphi}{\operatorname{tg}\varphi}<\varepsilon.$$

Jeżeli jakikolwiek kąt φ spełnia tę nierówność, to spełnia ją także każdy kąt dodatni $\varphi'<\varphi$.

Dowodzi to, że

$$\frac{\varphi}{\operatorname{tg}\varphi}\to 1, \text{ gdy } \varphi\to 0.$$

Ćwiczenia XXVI. 1. Dowieść, że jeśli x jest miarą teoretyczną małego kąta, A zaś jest miara znacznie większego kąta ostrego, wówczas zachodzi przybliżona równość

$$\sin(A+x)\approx A+x\cos A$$

Wskazać kres górny błędu.

2. Zastosować poprzedni wzór do obliczenia $\sin 30^0 1'$.

3. Przy tych samych założeniach, co w zadaniu 1, znaleźć przybliżony wzór na $\cos(A+x)$.

4. Dowieść, że przy tych samych założeniach mamy przybliżoną równość

$$\frac{\sin(A+x)-\sin A}{\cos A-\cos(A+x)}\approx \operatorname{ctg} A.$$

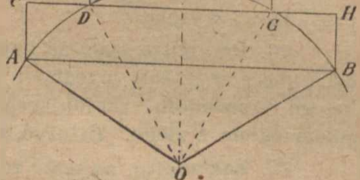
5. Jeżeli w trójkącie ABC boki b i c są stałe, kąt zaś A wzrósł o 1′ wówczas bok a wzrósł w przybliżeniu o $\frac{\pi h}{10800}$, gdzie h oznacza wysokość, poprowadzoną z wierzchołka A.

6. Boki a i b trójkąta zostały zmierzone dokładnie, natomiast przy pomiarze kąta C popełniono drobny błąd, wynoszący h radjanów. Wykazać, że wskutek tego błąd, popełniony przy obliczaniu pola trójkąta, równa się w przybliżeniu $\frac{1}{2}abh\cos C$.

Sprawdzić ten wynik, zakładając, że $a=325$ m., $b=245$ m., $c=60^0$ błąd zaś przy pomiarze kąta C równa się 6′.

7. Na rys. 112 kąt $\sphericalangle AOB=\alpha$ został podzielony na cztery równe części. Opierając się na tem, że suma pól prostokątów $ACHB$ i $DEFG$ jest większa od pola odcinka kołowego AKB, znaleźć kres górny różnicy $\alpha-\sin\alpha$.

8. Zastosować rozumowanie poprzedniego zadania do przypadku, gdy kąt α został podzielony na 6 lub 8 równych części. Czy można w ten sposób stworzyć metodę dowolnie dokładnego wyznaczenia błędu, który popełniamy, zastępując sinus przez miarę teoretyczną kąta?



Rys. 112

9. Dany jest wycinek kołowy AOB, w którym $\sphericalangle AOB = a$, przyczem $a < \frac{\pi}{2}$. Niech C będzie środkiem łuku AB, D środkiem łuku AC, E środkiem łuku AD i t. d.

(I) Wykazać, że suma jakkolwiek składników

$$\triangle ACB + 2 \triangle ADC + 2^2 \triangle AED + \ldots$$

jest mniejsza od pola odcinka kołowego ACB.

(II) Dowieść, że $\triangle ACB < \frac{r^2 a^3}{2^4}$, $\triangle ADC < \frac{r^2 a^3}{2^7}, \ldots$

i opierając się na tem wykazać, że

pole odcinka $ACB < \frac{r^2 a^3}{2^4}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \ldots\right)$,

stąd zaś wysnuć nierówność

$$a - \sin a < \frac{a^3}{6}.$$

10. Dowieść geometrycznie (nie posługując się wzorem na pole odcinka kołowego), że

$$\triangle ACB > \frac{1}{2} \text{ odcinka } ACB$$
$$\triangle ADC > \frac{1}{2} \text{ odcinka } ADC,$$

i t. d. do nieskończoności.

Opierając się na tem, dowieść, że granicą sumy pól

$$\triangle ACB + 2 \triangle ADC + 2^2 \triangle AED + \ldots$$

jest pole odcinka kołowego ACB.

11. Dowieść, że jeśli $a, b, c \ldots$ są ułamkami właściwemi, to

$$(1-a)(1-b) > 1-(a+b)$$
$$(1-a)(1-b)(1-c) > 1-(a+b+c)$$

i t. d. dla dowolnej liczby czynników.

Na podstawie tego twierdzenia oraz nierówności $\cos a > 1 - \frac{a^2}{2}$ dowieść, że $\sin a > a - \frac{a^3}{6}$.

12. Dowieść, że $\operatorname{tg} a < \frac{a}{1 - \frac{1}{2} a^2}$.

13. Dowieść, że $0{,}174533 < \operatorname{tg} 1^0 < 0{,}17455$.

14. Obliczyć odległość ziemi od księżyca, zakładając, że promień kuli ziemskiej ma 6350 klm. i że z księżyca widać go pod kątem 57′02″.

15. Wieżę, odległą o 3 klm., widać pod kątem 1°05′. Obliczyć jej przybliżoną wysokość.

16. Przypuszczając, że najmniejszy kąt, pod którym oko nasze widzieć może wyraźnie przedmiot jakiś, równa się 40″, obliczyć średnicę kulistego przedmiotu, znajdującego się na księżycu i ledwie dostrzegalnego gołem okiem z ziemi. Założyć, że odległość ziemi od księżyca = 384000 klm.

17. Zakładając, że metr równa się (w przybliżeniu) jednej czterdziestomiljonowej części południka ziemskiego, obliczyć największą odległość, z której widać szczyt wieży Eifla w Paryżu. Wysokość wieży = 300 m

18. Ze szczytu masztu, którego wysokość $= 20{,}1$ *m*, zaledwie dostrzegamy na horyzoncie szczyt skały, odległej od statku o 32,19 kilometra. Zbadać, czy skała jest wyższa czy niższa od masztu.

Przykłady zastosowań poprzednich wzorów.

§ 85. **Przykład I.** *Obliczyć kąt depresji horyzontu, mając dany promień* R *kuli ziemskiej i wysokość* h *punktu obserwacji.*

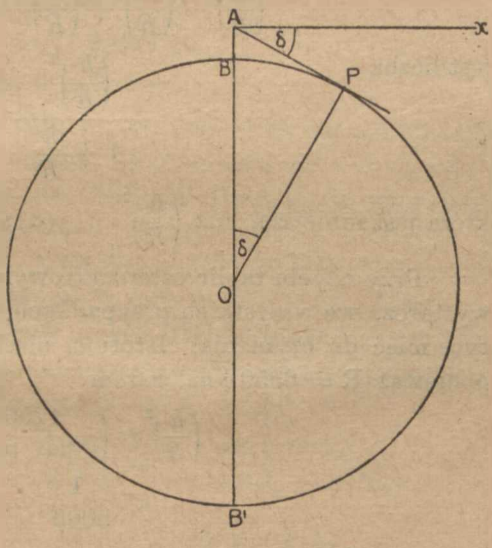
Niech rys. 113 przedstawia przekrój kuli ziemskiej; BO niech będzie jej promieniem, A zaś punktem obserwacji. Chodzi o obliczenie kąta δ, gdy mamy dane $OB = R$, $AB = h$. Ponieważ w trójkącie prostokątnym AOP mamy

$$\sphericalangle AOP = \sphericalangle XAP = \delta \qquad \text{(dlaczego?)}$$

zatem

$$\cos\delta = \frac{R}{R+h}. \tag{1}$$

Gdyby chodziło o możliwie najdokładniejsze obliczenie kąta δ w założeniu, że dane w zadaniu liczby R i h są znane dokładnie, należałoby w równaniu (1) zastąpić $\cos\delta$ przez $\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}$, gdyż δ jest zawsze małym kątem, a (jak wiemy z § 66, str. 132) przy obliczaniu małych kątów popełniamy mniejsze błędy, posługując się tangensami, niż wówczas, gdy posługujemy się sinusami lub kosinusami.



Rys. 113.

W praktyce jednak wystarcza najzupełniej rozwiązanie przybliżone.

Podzielmy we wzorze (1) licznik i mianownik przez R; będziemy mieli

$$\cos\delta = \frac{1}{1+\left(\frac{h}{R}\right)} \tag{2}$$

Zauważmy dalej, że prawą część równości (2) możemy uważać za granicę postępu nieskończonego geometrycznego

$$1-\left(\frac{h}{R}\right)+\left(\frac{h}{R}\right)^2-\left(\frac{h}{R}\right)^3+\left(\frac{h}{R}\right)^4-\ldots.$$

wobec czego mamy

$$\cos\delta=1-\left(\frac{h}{R}\right)+\left(\frac{h}{R}\right)^2-\left(\frac{h}{R}\right)^3+\ldots. \qquad (3)$$

Otóż powiadam, że jeśli we wzorze (3) poprzestaniemy na pierwszych dwóch wyrazach szeregu, albo innemi słowami: jeżeli wzór (3) zastąpimy przez równość przybliżoną

$$\cos\delta\approx 1-\frac{h}{R} \qquad (4)$$

popełnimy błąd mniejszy, niż $\left(\frac{h}{R}\right)^2$.

Istotnie, granicą postępu nieskończonego

$$\left(\frac{h}{R}\right)^2-\left(\frac{h}{R}\right)^3+\left(\frac{h}{R}\right)^4-\left(\frac{h}{R}\right)^5+\ldots.$$

jest liczba

$$\frac{\left(\frac{h}{R}\right)^2}{1+\frac{h}{R}},$$

która jest mniejsza, niż $\left(\frac{h}{R}\right)^2$ (dlaczego?)

Przy użyciu tablic czterocyfrowych tego rodzaju przybliżenie wystarcza we wszystkich przypadkach, z jakiemi możemy w praktyce mieć do czynienia. Istotnie, niech będzie np. $h=1200$ m.; ponieważ $R=6350$ km., zatem

$$\left(\frac{h}{R}\right)^2=\left(\frac{1200}{6350\,.\,1000}\right)^2 < \frac{1}{5000}$$

tembardziej więc popełniony błąd musi być mniejszy od $\frac{1}{5000}$.

Wzór (4), jakkolwiek prosty, wymaga jednak posiadania tablicy kosinusów dla małych kątów. To też marynarze, którzy mają do czynienia z małemi wartościami h, posługują się innym wzorem, dającym wprawdzie gorsze przybliżenie, ale dla ich potrzeb praktycznych wystarczającym. Pamiętając, że

$$\cos\delta\approx 1-\frac{\delta^2}{2},$$

możemy napisać równość przybliżoną

$$1 - \frac{\delta^2}{2} \approx 1 - \frac{h}{R},$$

skąd

$$\delta \approx \sqrt{\frac{2h}{R}} \qquad (5)$$

ponieważ chodzi tu o kąt ostry dodatni.

Jak widać z naszego rozumowania, δ oznacza miarę teoretyczną kąta. Ponieważ jednak przyrządy miernicze tak są zbudowane, że dają wielkość kąta, wyrażoną w stopniach, zatem wzór (5) musimy jeszcze przekształcić. Wiemy, że

$$1 \text{ radjan} = \frac{180}{\pi} \text{ stopni},$$

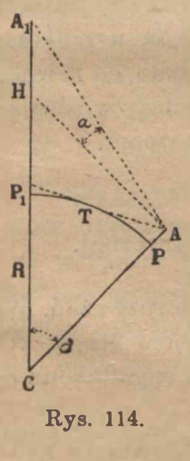
$$\approx 57{,}29578 \text{ stopni},$$

zatem, oznaczając przez i miarę kąta w minutach i kładąc $R = 6350$ klm., będziemy mieli

$$i \approx 1{,}9267 \sqrt{h},$$

przyczem h jest wyrażone w metrach.

Przykład II. *Z punktu* A, *znajdującego się na wysokości* AP = h *nad poziomem morza, obserwujemy górę* A_1P_1, *której podnóże leży pod horyzontem. Obliczyć wysokość* h_1 *góry, mając dany promień* R *kuli ziemskiej, kąt wzniesienia* α *punktu* A_1, *zmierzony w punkcie* A, *oraz kąt* δ *między promieniami kuli ziemskiej, poprowadzonemi do* A *i do* A_1.



Rys. 114.

Niech prosta AH (rys. 114) leży w płaszczyźnie poziomej, poprowadzonej przez A.

Z trójkąta ACA_1 mamy

$$\frac{R+h_1}{R+h} = \frac{\sin(CAA_1)}{\sin(CAA_1 + ACA_1)}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha + \delta\right)}$$

$$= \frac{\cos\alpha}{\cos(\alpha+\delta)}.$$

Kąty α i δ są bardzo małe, wobec czego równanie powyższe możemy zastąpić równością przybliżoną

$$\frac{R+h_1}{R+h} \approx \frac{1-\frac{\alpha^2}{2}}{1-\frac{(\alpha+\delta)^2}{2}}$$

skąd

$$h_1 - h_1\frac{(\alpha+\delta)^2}{2} \approx h - h\frac{\alpha^2}{2} + R\frac{(2\alpha\delta+\delta^2)}{2} \qquad (1)$$

Jeżeli h i h_1 są bardzo małe w porównaniu z promieniem R kuli ziemskiej (co zwykle zachodzi), wówczas powyższą równość przybliżoną można znacznie uprościć, odrzucając wyrazy

$$h_1\frac{(\alpha+\delta)^2}{2} \quad \text{oraz} \quad h\frac{\alpha^2}{2}.$$

Otrzymamy

$$h_1 \approx h + R\frac{(2\alpha\delta+\delta^2)}{2} \qquad (2)$$

Gdyby, przeciwnie, chodziło o dokładne obliczenie wysokości h_1, wówczas w równaniu

$$\frac{R+h_1}{R+h} = \frac{\cos\alpha}{\cos(\alpha+\delta)}$$

wypadłoby zastąpić kosinus przez tangens (d l a c z e g o?).

Po przekształceniach, które uczeń sam wykona, otrzymalibyśmy równanie

$$\frac{h_1-h}{2R+(h+h_1)} = \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\delta}{2}\right). \qquad (3)$$

W równościach przybliżonych (1) i (2) kąty α i δ, jak widać ze sposobu otrzymania tych równości, wyrażone są w radjanach, natomiast w rozumowaniu, które nas doprowadziło do równania (3), nie czyniliśmy tego założenia, tak, iż α i δ mogą w równaniu (3) oznaczać zarówno liczbę radjanów, jak liczbę stopni.

Uogólnienie pojęcia funkcji trygonometrycznej.

§ **86**. Jesteśmy już prawie u kresu naszych rozważań. Warto jest teraz rzucić okiem wstecz i uświadomić sobie drogę, którą przebiegliśmy. Badania nasze wzięły początek z zagadnienia czysto praktycznego:

I. Z n a l e ź ć s p o s ó b l i c z b o w e g o w y r a ż a n i a z a l e ż n o ś c i m i ę d z y b o k a m i i k ą t a m i t r ó j k ą t a.

W celu uproszczenia badania rozpoczęliśmy je od trójkątów prostokątnych, wprowadzając pojęcie funkcji trygonometrycznej kąta ostrego. Chcąc jednak zdobyte wiadomości zastosować do trójkąta ogólnego, byliśmy zmuszeni uczynić dalszy krok w budowaniu teorji, mianowicie rozszerzyć pojęcie funkcji trygonometrycznej na kąty dowolne.

Właściwie mówiąc, do naszego pierwotnego celu — badania trójkątów—wystarczyłoby rozszerzenie pojęcia funkcji trygonometrycznych na kąty rozwarte. Tu jednak zaszedł fakt często spotykany w nauce: pojęcie, utworzone do pewnego bardzo specjalnego celu, dało się z największą łatwością zastosować do zupełnie innych zagadnień. Istotnie, jeżeli np. tg α określimy jako stosunek rzędnej do odciętej $\left(\frac{y}{x}\right)$ dowolnego punktu, leżącego na drugiem ramieniu kąta α, wówczas okaże się, że to określenie daje się zastosować nie tylko do kąta $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, ale do kąta dowolnego (czyli również wtedy, gdy mamy $\alpha > 360^\circ$ lub $\alpha < 0^\circ$), a więc może być stosowane wszędzie, gdzie mamy do czynienia z kątami dowolnej wielkości.

Opierając się na rozszerzonem pojęciu funkcji trygonometrycznych, zdołaliśmy rozwiązać zagadnienie praktyczne, które sobie postawiliśmy. Na tem jednak nie mogliśmy poprzestać, zaszedł bowiem znów fakt bardzo pospolity w matematyce (spotykany zresztą i w innych naukach): oto okazało się, że wymyślone przez nas pojęcie (funkcja trygonometryczna) posiada własności zupełnie nowe, zgoła nieoczekiwane—jak np. okresowość, której nie spotykaliśmy u funkcyj algebraicznych. To musiało skłonić nas do postawienia sobie dalszego zagadnienia:

II. Zbadać własności funkcyj trygonometrycznych.

Temu zagadnieniu poświęcony był rozdział IV. Okazało się, że prócz okresowości funkcje te posiadają oryginalną własność, której wyrazem jest wzór na $\sin(\alpha + \beta)$. Przez wprowadzenie miary teoretycznej kąta udało się nam poznać nieco dokładniej sposób, w jaki te funkcje zachowują się, gdy zmienna niezależna (kąt α) dąży do zera.

Badania te o charakterze czysto teoretycznym znalazły jednak również zastosowanie praktyczne (np. do zagadnień z dziedziny miernictwa i do układania tablic trygonometrycznych), co również należy do najpospolitszych zjawisk w rozwoju nauki.

Teraz musimy uczynić jeszcze jeden krok naprzód, a mianowicie

III. Uwolnić się przy rozważaniu funkcyj trygonometrycznych od pojęcia kąta, jako zmiennej niezależnej.

Objaśnijmy na przykładzie, o co tu może chodzić. Wyobraźmy sobie, że ktoś, nie znający funkcji kwadratowej, zajmuje się badaniem ruchu prostolinjowego jednostajnie przyspieszonego i na podstawie tych czy innych rozważań dochodzi do wzoru

$$s = v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2,$$

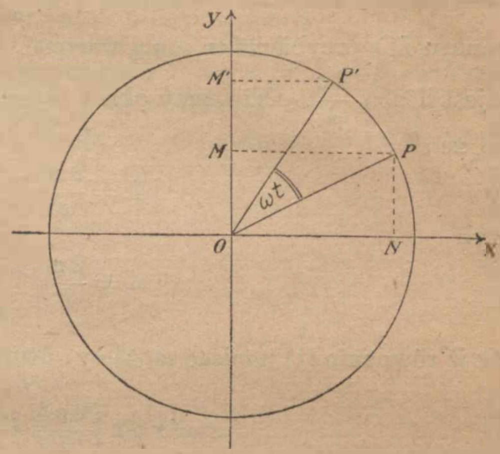
gdzie s oznacza drogę punktu, v_0 — jego prędkość początkową, a — stałe przyspieszenie, t — czas.

Zbudowawszy taką funkcję (w której zmienną niezależną jest czas t), mógłby nasz fikcyjny uczony zająć się badaniem jej własności i stworzyć całkowitą teorję tego, co my nazywamy trójmianem kwadratowym albo funkcją kwadratową jednej zmiennej. Po rozpoznaniu jednak charakterystycznych jej własności (np. istnienia dwóch pierwiastków, istnienia maximum albo minimum i t. p.), musiałby on niewątpliwie postawić sobie pytanie: czy funkcja ta jest czemś, co spotyka się tylko w dziedzinie mechaniki, czy też istnieją inne zjawiska, dające się opisać zapomocą tego samego wzoru? Albo innemi słowami: czy istnieją zjawiska różne od zjawisk ruchu, w których jednak występuje ta sama forma zależności między wielkościami zmiennemi? Rzecz prosta, że odpowiedź wypadłaby twierdząca, a wtedy w umyśle uczonego pozostałaby funkcja kwadratowa ze wszystkiemi jej własnościami jako pewien typ zależności, przyczem zmienna niezależna t przestałaby dla niego oznaczać czas, lecz mogłaby oznaczać jakąkolwiek wielkość zmienną.

Otóż zachodzi pytanie: czy nie można tego samego powiedzieć o funkcjach trygonometrycznych? czy sinus, tangens i t. d. nie są również tylko pewnemi typami zależności, bynajmniej nie związanemi z kątem? Innemi słowami: czy w funkcji $y = \sin x$ zmienna niezależna x musi być koniecznie kątem, czy też może być jakąkolwiek wielkością zmienną?

Z góry należałoby przypuszczać, że to jest możliwe: wszak możemy pomyśleć dwie wielkości zmienne A i B takie, że gdy A rośnie lub maleje, B zmienia się okresowo i to w taki sam sposób, w jaki musiałaby zmieniać się funkcja $\sin A$ albo $\operatorname{tg} A$, gdyby wielkość A była kątem.

Godnem uwagi jest to, że w mnóstwie najpospolitszych i najważniejszych zjawisk fizycznych natrafiamy na zależność między wielkościami zmiennemi, która daje się wyrazić matematycznie zapomocą funkcyj trygonometrycznych, przyczem argumentem tych funkcyj (zmienną niezależną) nie jest bynajmniej kąt. Dla przykładu zastanowimy się nad ruchem harmonicznym prostym.



Rys. 115.

Niech punkt P porusza się po kole z prędkością jednostajną i niech ω będzie prędkością kątową, z którą promień OP obraca się dokoła punktu O. Spróbujmy zbadać, jak porusza się punkt M, będący rzutem punktu P na oś y-ów.

Po upływie czasu t promień OP zakreśli kąt $\sphericalangle POP' = \omega t$ radjanów, jeśli więc w położeniu początkowem promień ten tworzył z osią x-ów kąt $\sphericalangle XOP = \alpha$ radjanów, wówczas musi być

$$\sphericalangle XOP' = \omega t + \alpha \text{ radjanów}$$

oraz

$$OM' = r \sin(\omega t + \alpha).$$

Tak więc równanie ruchu punktu M ma kształt

$$s = r \sin(\omega t + \alpha) \qquad (1)$$

Gdybyśmy badali ruch punktu N, będącego rzutem punktu P na oś x-ów, otrzymalibyśmy

$$s = r \cos(\omega t + \alpha)$$

$$= r \sin\left[\frac{\pi}{2} - (\omega t + \alpha)\right] \qquad (2)$$

Zauważmy, że w równaniu tem ω i α są liczbami stałemi, zatem funkcją (zmienną zależną) jest t. zw. wychylenie s, argumentem zaś (zmienną niezależną) jest t, a więc nie kąt, lecz czas.

Funkcja sinus jest, jak wiemy, okresowa, okresem zaś jest liczba 2π. Tak więc

$$\sin(\omega t + \alpha) = \sin(\omega t + \alpha + 2\pi)$$

$$= \sin\left[\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \alpha\right].$$

Widzimy tedy, że jeśli w równaniu (1) zwiększymy lub zmniejszymy zmienną niezależną t o $\frac{2\pi}{\omega}$, funkcja α (*wychylenie* punktu M) przybierze tę samą wartość. Tak więc okresem funkcji s jest liczba $\frac{2\pi}{\omega}$. Oznaczmy *okres* literą T. Z powyższego wynika, że

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

czyli

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

tak iż równanie (1) napisać możemy również w postaci

$$s = r \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right) \qquad (2)$$

Fizycy nazywają r *amplitudą wahań* albo drgań, liczbę zaś $\frac{2t\pi}{T} + \alpha$ *fazą* drgań.

Możemy na funkcji s wykonywać rachunki liczbowe albo też wykreślić ją zapomocą tablic trygonometrycznych, opierając się na tem, że wychylenie s powinno mieć taką samą wartość liczbową, jak gdyby faza drgań była kątem, mającym $\frac{2\pi t}{T} + \alpha$ radjanów. Należy tedy najpierw obliczyć, ilu stopniom odpowiada $\frac{2\pi t}{T} + \alpha$ radjanów, poczem można posługiwać się tablicą wartości sinusa.

Obrazem funkcji s musi być, oczywiście, sinusoida, która jednak w porównaniu z sinusoidą normalną o równaniu

$$y = \sin x$$

może być mniej lub więcej stroma, może posiadać okres mniejszy lub większy od okresu sinusoidy normalnej (t. j. od 2π), może być przesunięta w prawo lub w lewo wzdłuż osi x-ów i t. p.

Na rys. 116 linja kropkowana przedstawia sinusoidę

$$y = \sin x,$$

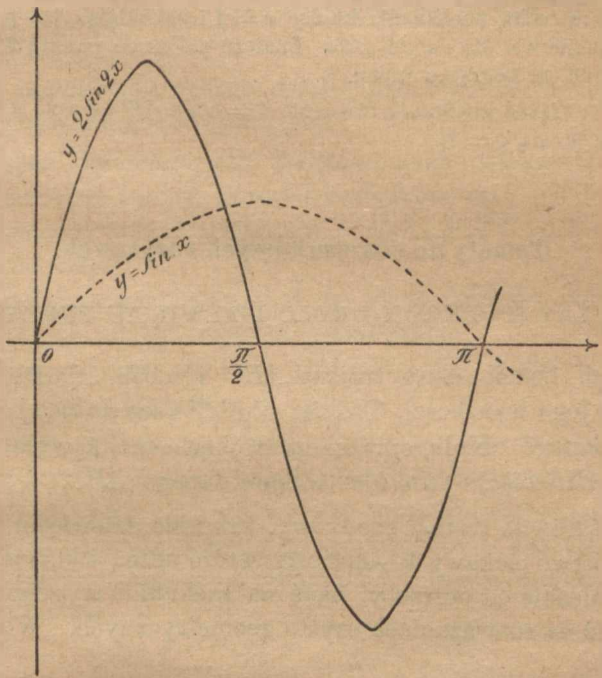
natomiast linja ciągła jest obrazem funkcji

$$y = 2 \sin 2x$$

t. j. obrazem funkcji $y = r \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right)$,

w której położyliśmy $r = 2$, $\alpha = 0$ oraz $\frac{2\pi}{T} = 2$.

Gdybyśmy, przeciwnie, przypuścili, że $\alpha \neq 0$, wówczas krzywa nasza zostałaby przesunięta o α wzdłuż osi x-ów w prawo lub w lewo, zależnie od znaku liczby α. Obie sinusoidy na rys. 116



Rys. 116.

mają kształt linij falistych, jednak długości fal są u tych krzywych różne: długość fali jednej z nich $= 2\pi$, długość fali drugiej $= \pi$. Uczeń spróbuje sam określić, co nazywamy długością fali.

Ćwiczenia XXVIII. 1. Jakie są okresy funkcyj $\sin(4x+3)$, $\sin(xa+c)$, $\cos(ax+c)$, $\operatorname{tg} ax$, $\operatorname{tg}(ax+b)$?

2. Czem powinien różnić się wykres funkcji $y = a \sin x$ od wykresu funkcji $y = \sin x$?, od wykresu funkcji $y = a \sin px$?

3. Krzywa $y = \sin x$ została przesunięta o 2 w górę i o 3 w prawo; napisać równanie tej drugiej krzywej. Jakie są jej maxima i minima?

4. Amplituda pewnej sinusoidy równa się 3; okres jej równa się 2,5; przy $x = 0$ mamy $y = -3 \sin \frac{2\pi}{3}$. Napisać równanie sinusoidy.

5. Największe rzędne pewnej kosinusoidy równają się 5; przy $x = 0$ mamy $y = 4{,}1265$; przy $x = 1$ mamy $y = -1{,}6168$. Napisać równanie kosinusoidy.

6. Czy funkcja $y = \operatorname{tg} px$ posiada maxima i minima? Czy jest ciągła? Jeżeli nie, to gdzie zachodzą przerwy ciągłości?

7. Wykazać, że krzywa $y = \sin x + \cos x$ jest sinusoidą. Obliczyć jej amplitudę i okres.

8. Punkt P na rys. 115 obiega okrąg koła 5 razy na sekundę. Napisać równanie ruchu punktu M, kładąc $r = 2$ i zakładając, że początkowo punkt P znajdował się na osi x-ów. Znaleźć położenie punktu M po upływie 3 sekund od początku ruchu.

9. Rozwiązać graficznie równanie $t = \sin t$. [Wskazówka: wziąć pod uwagę prostą $y = t$].

Tematy do obszerniejszych rozprawek.

TRÓJKĄT SPODKOWY I KOŁO DZIEWIĘCIU PUNKTÓW.

Niech będzie dany trójkąt ABC i niech A', B', C' będą spodkami jego wysokości. Trójkąt $A'B'C'$ nazywa się *spodkowym* trójkąta danego. Koło, opisane na trójkącie spodkowym, nazywa się *kołem dziewięciu punktów* trójkąta danego ABC.

1. Zarówno trójkąt spodkowy, jak koło dziewięciu punktów mają mnóstwo ciekawych własności, które uczeń wykryje, opierając się, zależnie od potrzeby, bądź na rachunku trygonometrycznym, bądź na rozważaniach czysto geometrycznych. W tym celu należy:

1. zbadać, czem jest w trójkącie spodkowym wysokość trójkąta danego ABC;

2. zbadać wielkość kątów i boków trójkąta spodkowego;

3. znaleźć prosty związek między promieniem R koła opisanego na trójkącie ABC i promieniem R' koła dziewięciu punktów;

4. wykazać, że koło dziewięciu punktów przechodzi przez środki A_1, B_1, C_1 boków a, b, c i przez środki M_1, M_2, M_3 odcinków AH, BH, CH, gdzie H jest ortocentrem trójkąta ABC [1]) (w tym celu można zbadać, jakiego rodzaju jest czworobok $M_1 M_2 A_1 B_1$);

---

[1]) Ortrocentrem nazywamy punkt przecięcia się wysokości trójkąta.

5. zbadać położenie środka N koła dziewięciu punktów względem ortocentru H i środka O koła, opisanego na trójkącie ABC;

6. przez obliczenie odcinków OW, WH (lub w inny jakiś sposób) przekonać się, że $WN = \frac{R}{2} - \rho$, gdzie W jest środkiem koła wpisanego w $\triangle\ ABC$, a stąd otrzymać najważniejszą własność koła dziewięciu punktów, mianowicie, że jest ono styczne do koła wpisanego;

7. w analogiczny sposób ustalić położenie koła dziewięciu punktów względem kół zawpisanych.

II. Prócz wymienionych podstawowych własności można otrzymać mnóstwo innych prostych związków, np.

1. pomiędzy polami trójkątów $B'A'C'$, $A'B'C$, $AB'C'$ a polem trójkąta ABC;

2. między promieniami R, ρ, ρ_a, ρ_b, ρ_c trójkąta ABC a promieniami ρ', ρ_a', ρ_b', ρ_c' trójkąta spodkowego;

3. między odcinkami NA, NB, NC, NH z jednej strony, a promieniem R z drugiej.

III. Opierając się na fakcie, że dla każdego trójkąta ABC istnieje trójkąt spodkowy (którego kąty i boki uczeń poprzednio już znalazł), można z znanych wzorów trygonometrycznych, odnoszących się do trójkąta ABC, otrzymywać nowe związki między bokami i kątami dowolnego trójkąta. Np. z wzoru tangensów można otrzymać wzór

$$\frac{a\cos A - b\cos B}{a\cos A + b\cos B} = \frac{\operatorname{tg}(A-B)}{\operatorname{tg}(A+B)},$$

zastępując boki i kąty trójkąta ABC przez boki i kąty trójkąta spodkowego. Czy można tego rodzaju podstawienia wykonać po raz drugi, trzeci...?

Uczeń może w analogiczny sposób przekształcić inne znane mu wzory, dotyczące trójkątów.

PUNKTY BROCARDA.

Stawiamy sobie zagadnienie następujące:

czy w trójkącie ABC *można znaleźć taki punkt* Ω (*zwany punktem Brocarda*), *żeby było* $\sphericalangle\ \Omega AB = \sphericalangle\ \Omega BC = \sphericalangle\ \Omega CA$?

Chcąc zbudować punkt Ω, wystarczy zbadać kąty $\sphericalangle\ A\Omega B$, $\sphericalangle\ B\Omega C$, $\sphericalangle\ C\Omega A$.

Czy istnieje drugi, analogiczny punkt Ω'?

Jak są położone boki trójkąta ABC względem łuków kół $A\Omega B$, $A\Omega' B$?

Oznaczając przez ω równe kąty między bokami trójkąta a prostemi, łączącemi wierzchołki z punktami Ω i Ω', szukać należy prostych związków między $\operatorname{ctg}\omega$ z jednej strony, z drugiej zaś kątami A, B, C lub bokami a, b, c i polem S trójkąta.

Proste wzory można również znaleźć na $\left(\frac{1}{\sin\omega}\right)^2$ i na $\cos^2\omega$.

Po obliczeniu odcinków $A\Omega$, $A\Omega'$, $B\Omega$ i t. d., pól trójkątów $B\Omega C$, $B\Omega' C$ i t. d., promieni kół $A\Omega B$ i t. d. wykryć można między niemi rozmaite związki.

SUMOWANIE PEWNYCH SZEREGÓW I ICH ZASTOSOWANIE.

I. Sumy n wyrazów szeregów (skończonych)

$$\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) + \ldots$$

$$\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + \ldots$$

można znaleźć, rozkładając poszczególne wyrazy ich na dwa składniki tak, by otrzymać szereg kształtu

$$(a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_{n-1} - a_n).$$

Aby ułatwić sobie to przekształcenie, można wszystkie wyrazy szeregu pomnożyć i podzielić przez $2\sin\frac{\beta}{2}$.

Można też znaleźć inny sposób sumowania.

II. Zastosowanie. Niech będzie dana sinusoida $y = \sin x$, na której rozważamy łuk OM, odpowiadający wartościom zmiennej niezależnej w przedziale od 0 do $\frac{\pi}{2}$. Jeżeli z punktu M poprowadzimy rzędną MN, otrzymamy trójkąt krzywolinjowy OMN. Intuicja skłania nas do przypisania temu trójkątowi oznaczonego pola, faktycznie jednak nie wiemy nawet, co możnaby nazwać polem takiej figury. Jesteśmy w tem samem położeniu, co przy pomiarze koła lub brył obrotowych. Mamy też analogiczne wyjście z tej trudności. Możemy mianowicie odcinek $ON = \frac{\pi}{2}$ podzielić na n równych części, w punktach podziału wystawić rzędne, zbudować szereg prostokątów o równych podstawach $\frac{\pi}{2n}$ i wysoko-

ściach, równających się odpowiednim rzędnym, i rozważać sumę wszystkich prostokątów wystających oraz sumę wszystkich prostokątów, mieszczących się pod krzywą. Gdyby się okazało, że sumy te przy nieograniczonem zwiększaniu liczby n dążą do tej samej granicy, moglibyśmy ową granicę n a z w a ć polem trójkąta krzywolinjowego OMN.

Po wprowadzeniu tej d e f i n i c j i p o l a można obliczyć wartość pola, opierając się na dodatkowem założeniu, że *jeśli wielkości* A *i* B *dążą odpowiednio do granic* α *i* β, *to iloczyn* AB *dąży do granicy* $\alpha\beta$[1]).

1) Uczeń może spróbować dowieść tego twierdzenia.